



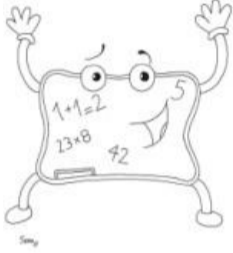
Guía 5

Ecuaciones mágicas

Nombre	
Curso	8° Año Básico A - B - C
Capacidad	Razonar matemáticamente
Destreza	Comparar
Valor	Colaboración
Actitud	Constancia



$$2x + 1 = x + 3$$



Ahora iniciamos el estudio de las ecuaciones, las guías anteriores nos han dado una base para comprender los procesos algebraicos necesarios para alcanzar este aprendizaje:

Aprendizaje Esperado

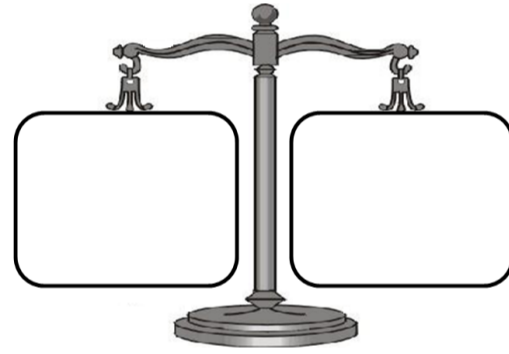
Plantear ecuaciones que representen la relación entre dos variables en diversos contextos.

Metáfora de la balanza¹

En nuestro estudio utilizaremos la metáfora de la clásica Balanza de dos brazos (ver imagen izquierda), pero por motivos de comodidad, la representaremos de manera simplificada mediante la figura de la derecha:



Balanza clásica

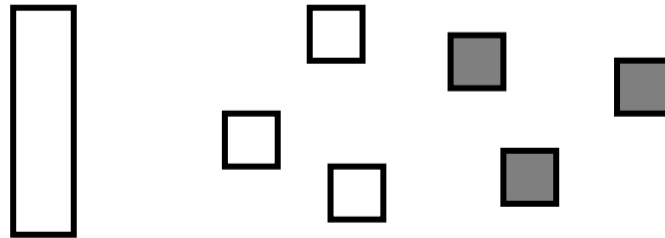


Balanza simplificada

Utilizaremos la idea de equilibrio entre los platillos de la derecha e izquierda, pero respetando algunas reglas:

REGLAS

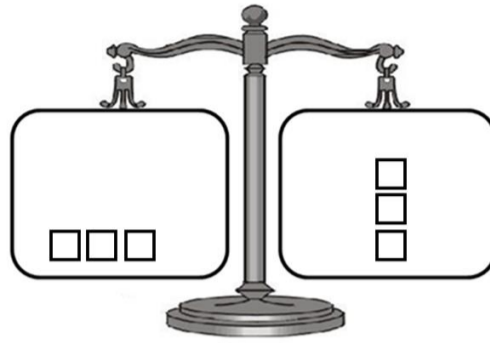
- 1) Trabajaremos con fichas cuadradas de dos colores, blancos y grises, las cuales tienen una masa que se puede medir con la balanza. Además, usaremos unos rectángulos que simulan una caja guardar a estos cuadraditos.



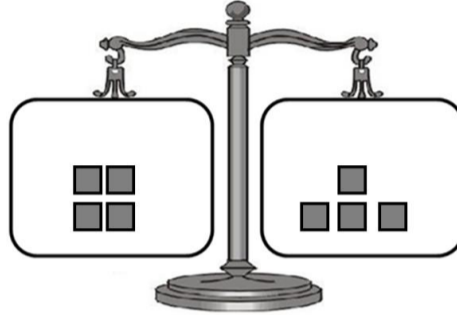
¹ Idea extraída desde el sitio web: <http://www.automind.cl/educacion/educacion.htm>



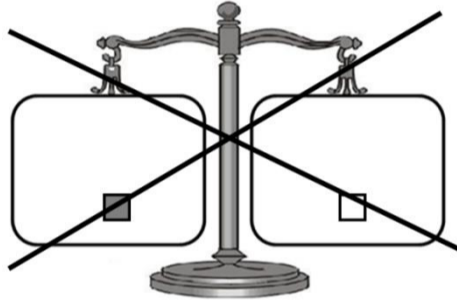
- 2) Las fichas blancas serán de signo positivo y poseen una masa que se debe tener en cuenta al momento de equilibrar la balanza. Por ejemplo, tres fichas positivas se equilibran con tres fichas positivas:



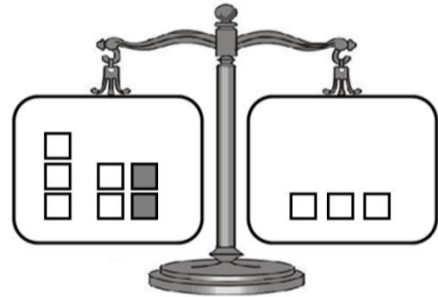
- 3) A las fichas grises se les asigna el signo negativo y se pueden equilibrar entre ellas, por ejemplo, podemos equilibrar cuatro fichas negativas entre sí:



- 4) No podemos equilibrar una ficha positiva con una negativa:



- 5) Regla Mágica: si ponemos una ficha positiva con otra negativa en un mismo lado de la balanza, ellas pierden masa, es decir, su masa es de 0 gramos. Por ejemplo, la siguiente balanza mantiene el equilibrio, ya que en el lado izquierdo, las dos fichas negativas anulan la masa de dos fichas positivas y, de esta forma, se mantiene el equilibrio entre tres fichas positivas de cada lado de la balanza.



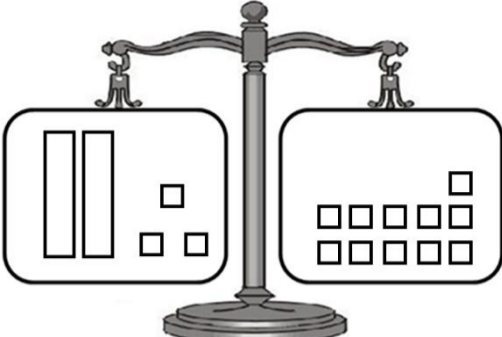
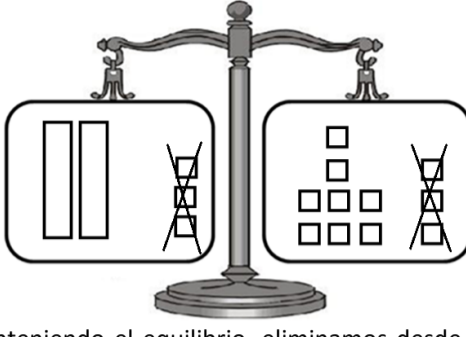
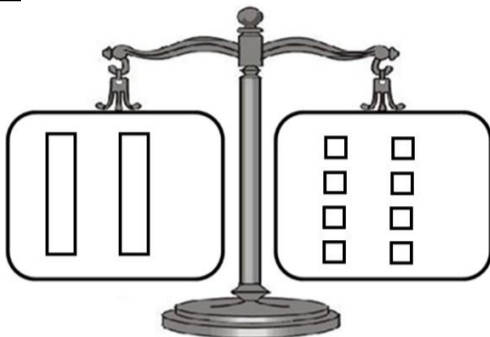
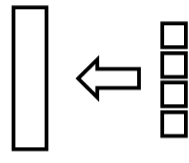
- 6) Las fichas se guardan en las cajas formando una fila y deben ser de un mismo color, por ejemplo:



- 7) Las cajas poseen una **propiedad mágica**: no poseen masa.

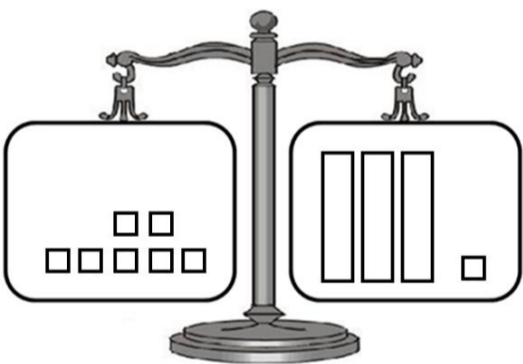


En la siguiente secuencia de imágenes, observa una estrategia para resolver la ecuación anterior:

<p><u>Paso 1</u></p>  <p>En cada lado de la balanza, separamos 3 fichas.</p>	<p><u>Paso 2</u></p>  <p>Manteniendo el equilibrio, eliminamos desde cada lado tres fichas.</p>
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Ordenamos en dos filas las ocho fichas que sobran en el lado derecho, de modo de compararlas con las dos cajas del lado izquierdo.</p>	<p><u>Paso 4</u></p> <p>De la equivalencia anterior, podemos concluir que en cada caja hay 4 fichas:</p>  <p>Por lo tanto, la ecuación $2x + 3 = 11$ tiene solución $x = 4$</p>

Situación 3

La balanza está en perfecto equilibrio, además, en cada caja hay igual cantidad de fichas. ¿Cuántas fichas hay en el interior de cada caja? Completa la representación simbólica.

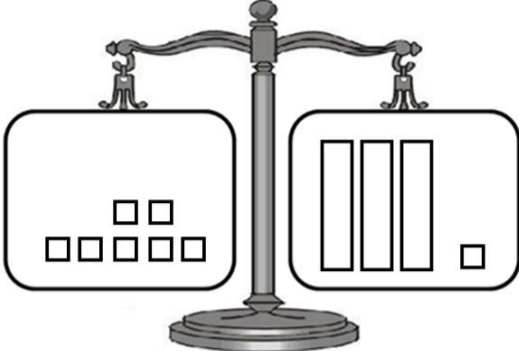
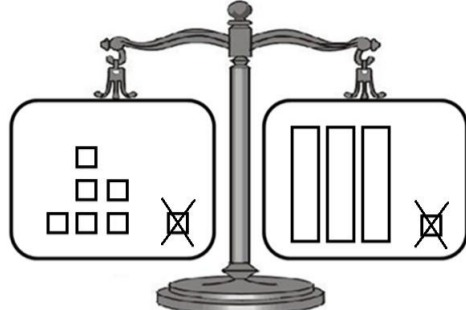
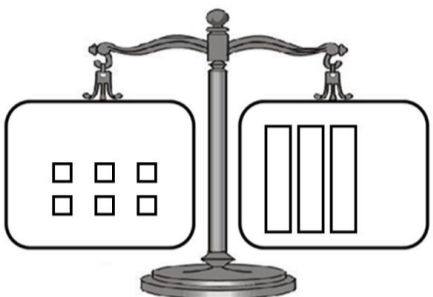
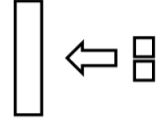
Representación visual	Representación simbólica
	

Explica tu razonamiento.


--

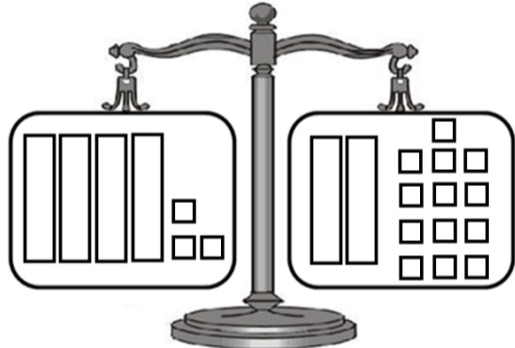


Resolvamos la ecuación utilizando la estrategia anterior:

<p><u>Paso 1</u></p>  <p>En cada lado de la balanza, separamos 1 ficha.</p>	<p><u>Paso 2</u></p>  <p>Manteniendo el equilibrio, eliminamos desde cada lado 1 ficha.</p>
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Ordenamos en tres filas las seis fichas que sobran en el lado izquierdo, de modo de compararlas con las tres cajas del lado derecho.</p>	<p><u>Paso 4</u></p> <p>De la equivalencia anterior, concluimos que en cada caja hay 2 fichas:</p>  <p>Por lo tanto, la ecuación $7 = 3x + 1$ tiene solución $x = 2$</p>

Situación 4

La balanza está en perfecto equilibrio y en cada caja hay igual cantidad de fichas, ¿cuántas fichas hay en el interior de cada caja?

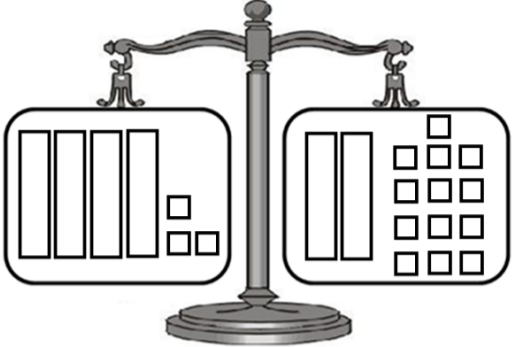


Representación visual	Representación simbólica
	

Explica tu razonamiento.

<div style="border: 1px dashed gray; width: 100%; height: 100%;"></div>

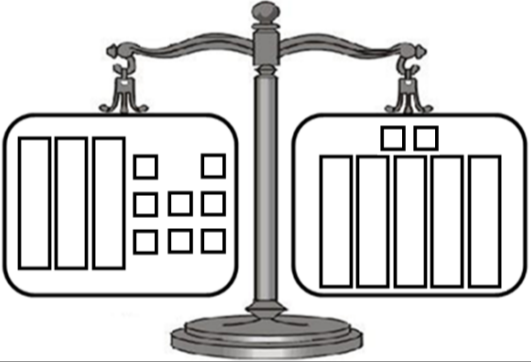


Dibuja la secuencia de imágenes que permiten resolver la ecuación anterior:

<p><u>Paso 1</u></p> 	<p><u>Paso 2</u></p> 
<p><u>Paso 3</u></p> 	<p><u>Paso 4</u></p>

Situación 5

La balanza está en perfecto equilibrio y en cada caja hay igual cantidad de fichas, ¿cuántos fichas hay en el interior de cada caja? Completa la representación simbólica.

Representación visual	Representación simbólica
	

Explica tu razonamiento.

<p>Grid for explaining reasoning:</p>

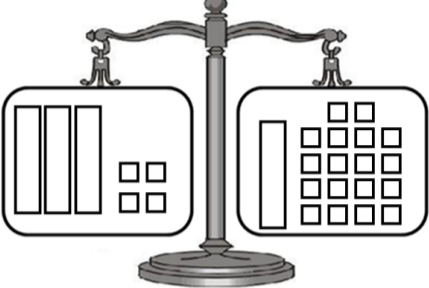
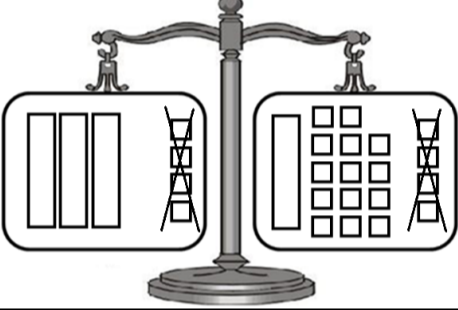
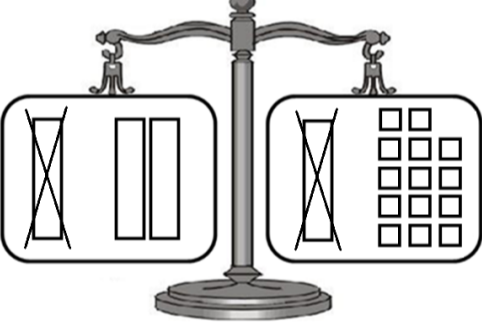
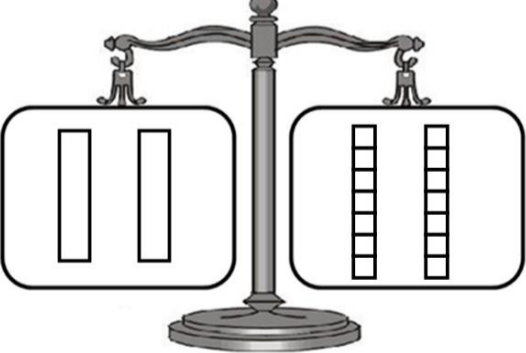


Un método simbólico para resolver ecuaciones

En la siguiente tabla se presenta una comparación entre el método visual (estudiado anteriormente) y el método simbólico que se utiliza habitualmente en Álgebra.

Primer ejemplo

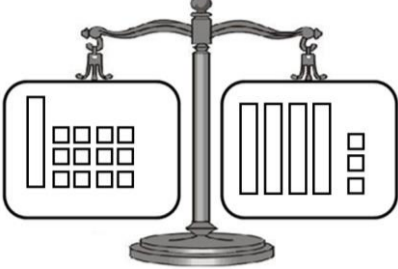
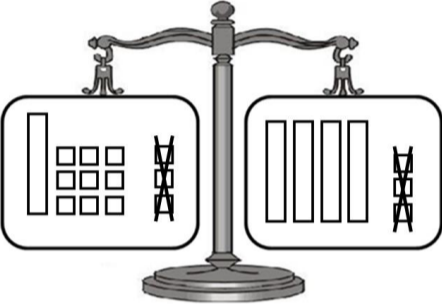
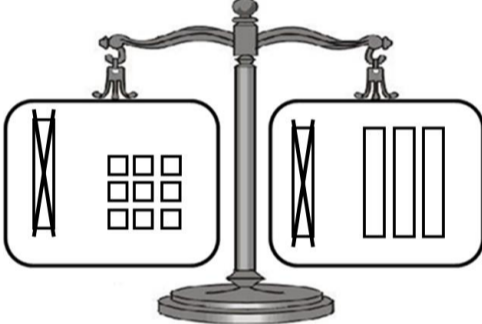
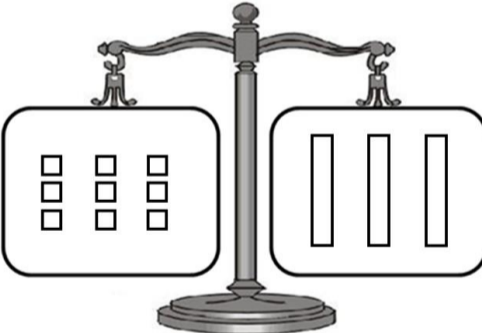
Resolver la ecuación $3x + 4 = x + 18$

Método visual	Método Simbólico
<p><u>Paso 1</u></p>  <p>El objetivo es dejar aisladas las tres cajas en el lado izquierdo, eliminaremos cuatro fichas de cada lado de la ecuación.</p>	$3x + 4 = x + 18$ <p>En el lado izquierdo de la ecuación debemos aislar el término $3x$, para ello restaremos 4 en cada lado de la ecuación.</p>
<p><u>Paso 2</u></p> 	$3x + 4 = x + 18$ $3x + 4 - 4 = x + 18 - 4$ $3x = x + 14$
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Manteniendo el equilibrio, en cada lado de la balanza eliminamos una caja.</p>	$3x = x + 14$ $3x - x = x + 14 - x$ $2x = 14$
<p><u>Paso 4</u></p> 	<p>Comparando las cajas y las fichas concluimos que:</p> $x = 7$



Segundo ejemplo

Resolver la ecuación $x + 12 = 4x + 3$

Método visual	Método Simbólico
<p><u>Paso 1</u></p>  <p>Con el fin de dejar aisladas las cuatro cajas en el lado derecho, eliminaremos cuatro fichas de cada lado de la ecuación.</p>	$x + 12 = 4x + 3$ <p>En el lado derecho de la ecuación debemos aislar el término $4x$, para ello restaremos 3 en cada lado de la ecuación.</p>
<p><u>Paso 2</u></p>  <p></p>	$x + 12 = 4x + 3$ $x + 12 - 3 = 4x + 3 - 3$ $x + 9 = 4x$
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Manteniendo el equilibrio, en cada lado de la balanza eliminamos una caja.</p>	$x + 9 = 4x$ $x + 9 - x = 4x - x$ $9 = 3x$
<p><u>Paso 4</u></p>  <p></p>	<p>Comparando las cajas y las fichas concluimos que:</p> $x = 3$



Hora de practicar



1) En cada caso, construir la representación visual y resolver la ecuación propuesta:

a)

Representación visual	Representación simbólica
	$3x + 4 = x + 12$

b)

Representación visual	Representación simbólica
	$2x + 15 = 5x$

c)

Representación visual	Representación simbólica
	$4x + 13 = 7x + 4$

2) En cada caso, resuelva cada ecuación:

- a) $6x + 1 = x + 16$
- b) $x + 10 = 4x + 4$
- c) $7x + 3 = 17$

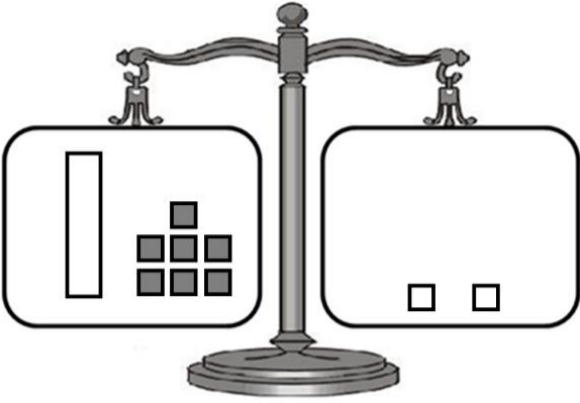
- d) $10 = 2x + 4$
- e) $3x + 10 = 7x + 2$
- f) $6x + 1 = x + 11$



Representando ecuaciones con términos negativos

Situación 1

La balanza está en perfecto equilibrio, ¿cuántas fichas hay en el interior de la caja y de qué color son?

Representación visual	Representación simbólica
	$x - 7 = 2$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$ <p>x representa la cantidad de fichas que hay dentro de la caja.</p>

Explica tu razonamiento:

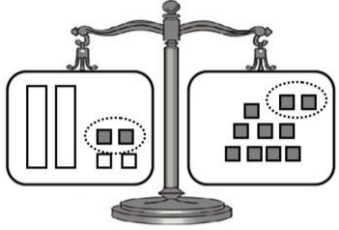
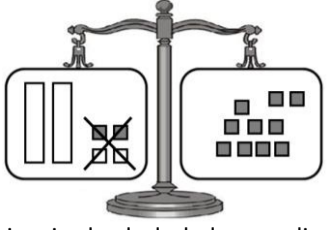
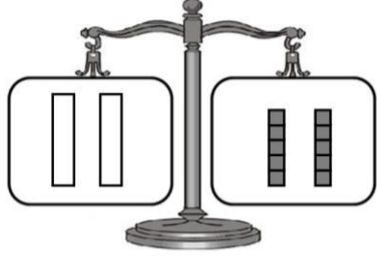


Ayuda:

Recuerda que existe una regla mágica que establece que si una ficha positiva se pone junto a una ficha negativa en el mismo lado de la balanza, ellas dos se anulan, es decir pierden su masa.

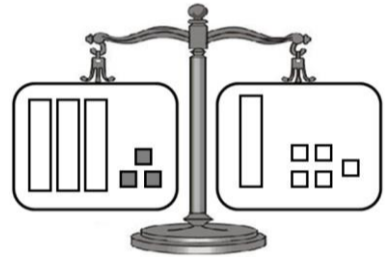


A continuación se presenta una secuencia de imágenes que explican cómo resolver la ecuación anterior:




<p><u>Paso 1</u></p>  <p>Agregamos 2 fichas negativas a cada lado de la balanza.</p>	<p><u>Paso 2</u></p>  <p>En el lado izquierdo de la balanza, eliminamos las fichas de signos contrarios.</p>
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Comparamos las dos cajas del lado izquierdo con las dos columnas de fichas negativas del lado derecho.</p>	<p>En el lenguaje del Álgebra decimos que la ecuación</p> $2x + 2 = -8$ <p>Tiene solución</p> $x = -5$

Situación 3

La balanza está en perfecto equilibrio y cada caja tiene igual cantidad de fichas del mismo tipo, ¿cuántas fichas hay en el interior de cada caja y de qué signo? Complete la representación simbólica.

Representación visual	Representación simbólica
	

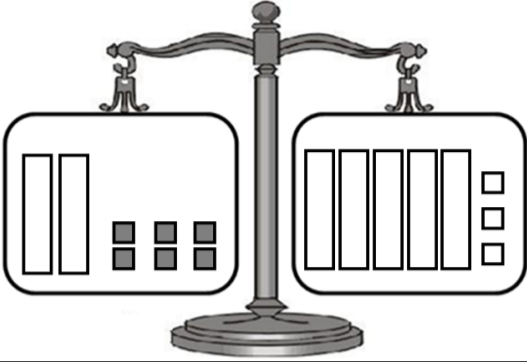
Complete la secuencia de imágenes que permite resolver la ecuación anterior:

<p><u>Paso 1</u></p> 	<p><u>Paso 2</u></p> 
<p><u>Paso 3</u></p> 	<p>En el lenguaje del Álgebra decimos que la ecuación</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>


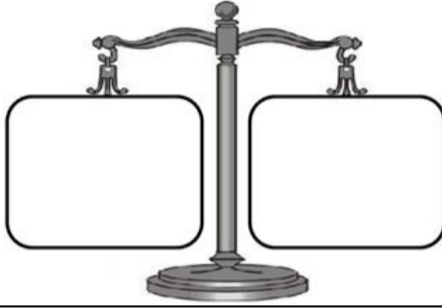



Situación 4

La balanza está en perfecto equilibrio y cada caja tiene igual cantidad de fichas del mismo tipo, ¿cuántas fichas hay en el interior de cada caja y de qué color? Complete la representación simbólica.

Representación visual	Representación simbólica
	

Complete la secuencia de imágenes que permite resolver la ecuación anterior:

<p><u>Paso 1</u></p> 	<p><u>Paso 2</u></p> 
<p><u>Paso 3</u></p> 	<p>En el lenguaje del Álgebra decimos que la ecuación</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

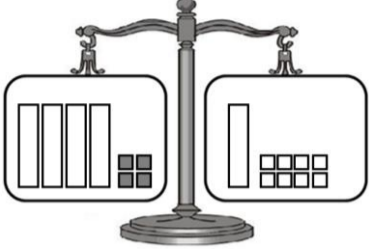
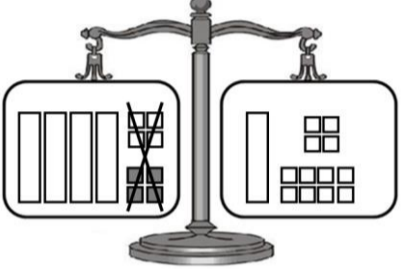
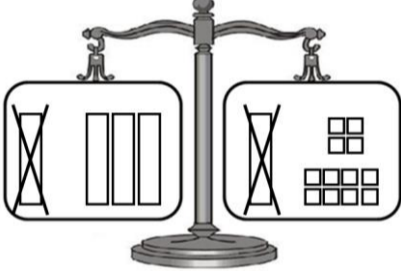
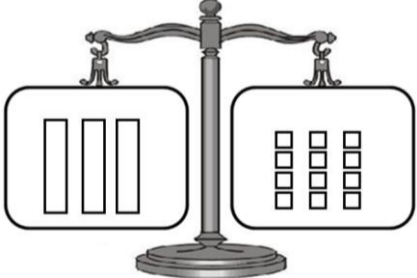


Método simbólico para resolver ecuaciones

Observa, atentamente, los siguientes ejemplos de comparación entre los métodos visual y simbólico para resolver ecuaciones:

Primer ejemplo

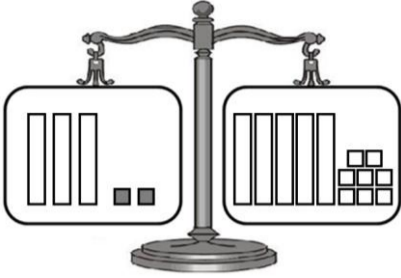
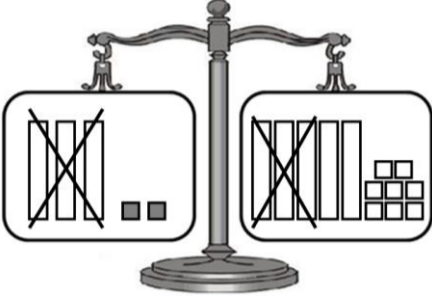
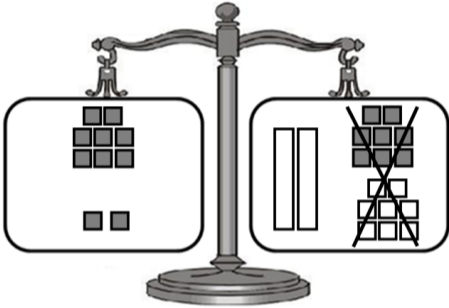
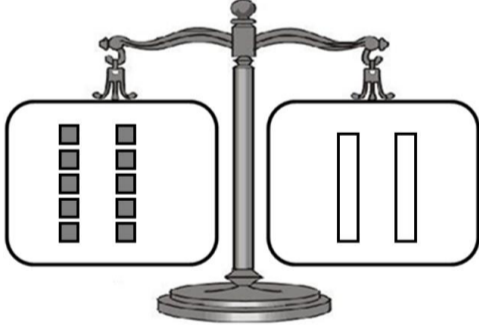
Resolver la ecuación $3x + 4 = x + 18$

Método visual	Método Simbólico
<p><u>Paso 1</u></p>  <p>Con el propósito de dejar aisladas las cuatro cajas en el lado izquierdo, agregaremos 4 fichas positivas en los dos lados de la balanza y de esta forma eliminamos las 4 cuatro fichas negativas del lado izquierdo.</p>	$4x - 4 = x + 8$ <p>En el lado izquierdo de la ecuación debemos aislar el término $4x$, para ello sumaremos 4 en cada lado de la ecuación.</p>
<p><u>Paso 2</u></p>  <p>En el lado izquierdo eliminamos las fichas positivas y negativas entre sí.</p>	$4x - 4 = x + 8$ $4x - 4 + 4 = x + 8 + 4$ $4x = x + 12$
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Manteniendo el equilibrio, en cada lado de la balanza eliminamos una caja.</p>	$4x = x + 12$ $4x - x = x + 12 - x$ $3x = 12$
<p><u>Paso 4</u></p> 	<p>Comparando las cajas y las fichas concluimos que:</p> $x = 4$



Segundo ejemplo

Resolver la ecuación $3x - 2 = 5x + 8$

Método visual	Método Simbólico
<p><u>Paso 1</u></p>  <p>Para comparar cajas con fichas, dejaremos cajas en el lado izquierdo y fichas en el lado izquierdo.</p>	$3x - 2 = 5x + 8$ <p>Restamos $3x$ a ambos lados de la ecuación.</p>
<p><u>Paso 2</u></p>  <p>Eliminamos tres cajas a ambos lados de la balanza.</p>	$3x - 2 = 5x + 8$ $3x - 2 - 3x = 5x + 8 - 3x$ $-2 = 2x + 8$
<p><u>Paso 3</u></p>  <p>Agregamos 8 fichas negativas en ambos lados de la balanza, y de esta forma, se eliminan las fichas en el lado derecho de la balanza.</p>	$-2 = 2x + 8$ $-2 - 8 = 2x + 8 - 8$ $-10 = 2x$
<p><u>Paso 4</u></p>  <p>Comparando las cajas y las fichas concluimos que:</p>	$x = -5$



Hora de practicar



3) En cada caso, construir la representación visual y resolver la ecuación propuesta:

a)

Representación visual	Representación simbólica
	$3x - 4 = 5$

b)

Representación visual	Representación simbólica
	$4x - 5 = x + 10$

c)

Representación visual	Representación simbólica
	$3x + 5 = -7$

d)

Representación visual	Representación simbólica
	$2x - 7 = 5x + 5$



e)

Representación visual	Representación simbólica
	$5x - 7 = 3x - 3$

f)

Representación visual	Representación simbólica
	$4x + 7 = x - 5$

4) En cada caso, resuelva cada ecuación:

a) $8x - 6 = 2$

b) $x = 4x - 9$

c) $4x - 2 = -10$

d) $4x + 7 = 2x - 3$

e) $9x + 8 = -10$

f) $x - 5 = 2x + 2$

g) $6x + 7 = 3x - 2$

h) $4x + 3 = 8x + 11$

i) $3x - 7 = x - 17$

j) $4x + 2 = 3x - 6$



Más ecuaciones

Observa atentamente cada uno de los ejemplos:

1) $3(x + 2) + (x - 5) = 9$
 $3 \cdot (x + 2) + 1 \cdot (x - 5) = 9$ ← Imaginar que 1 multiplica al paréntesis
 $3 \cdot x + 3 \cdot 2 + 1 \cdot x - 1 \cdot 5 = 9$ ← Aplicar la propiedad distributiva
 $3x + 6 + x - 5 = 9$ ← Resolver las multiplicaciones
 $4x + 1 = 9$ ← Reducir los términos semejantes
 $4x + 1 = 8 + 1$ ← Descomponemos 9 convenientemente
 $4 \cdot x = 8$ ← Eliminamos 1 de ambos lados
 $x = 2$ ← ¿Qué número multiplicado por 4 da 8?

2) $5(x - 1) - 2(x + 3) = 4$
 $5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x + 3) = 4$ ← Expresar como multiplicación
 $5 \cdot x - 5 \cdot 1 - 2 \cdot x - 2 \cdot 3 = 4$ ← Aplicar la propiedad distributiva
 $5x - 5 - 2x - 6 = 4$ ← Resolver las multiplicaciones
 $3x - 11 = 4$ ← Reducir los términos semejantes
 $3x - 11 + 11 = 4 + 11$ ← Sumamos 11 a cada lado para eliminar -11
 $3 \cdot x = 15$ ← Sumamos y restamos
 $x = 5$ ← ¿Qué número multiplicado por 3 da 15?

Para practicar lo aprendido

Resolver cada una de las ecuaciones:

- a) $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 18$ f) $4x + 3(x - 2) = x + 18$
b) $(2x) + (2x + 2) + (2x + 4) = 30$ g) $(2x - 1) + 2(x - 1) = 2x + 11$
c) $2(x + 8) = x + 10$ h) $x + (x + 40) + 90 = 180$
d) $3(x + 1) + 2(x + 2) = 22$ i) $(x - 20) + x + (x + 50) = 180$
e) $2(x - 1) + (x + 1) + (x + 3) = 18$ j) $3(x - 4) - (x + 4) = 8$