

Trabajo Final de Pasantía
Año 2011
Ecuación de la Recta

Profesores

Elizabeth Luna

Fernando Pavez Peñaloza

Karen Ruiz

Toulouse, Francia

Índice

Introducción.....	3
El Álgebra en la Enseñanza Básica y Media.....	5
Secuencia de sesiones.....	7
Sesión principal.....	9
Análisis a priori de la sesión principal.....	12
Análisis Didáctico de la sesión.....	23
Documentos de referencia.....	28
Bibliografía.....	38

Introducción

La siguiente propuesta se enmarca en la unidad de “Ecuación de la recta y otras funciones, modelos de situaciones diarias”, correspondiente al curso de Segundo Año Medio de Chile. El tema elegido corresponde al de “La Ecuación de la recta” y, en particular, el de la determinación de la ecuación de una recta a partir de las coordenadas de dos de sus puntos.

En el contexto del desarrollo de la unidad, aparte de describir el conjunto de sesiones en que se enmarca este trabajo, es necesario precisar algunas destrezas y conocimientos previos esenciales, que son transversales al desarrollo de la unidad. En su inicio, hay un conjunto de sesiones que abordarán problemas de la vida diaria, tales como: secuencia de figuras formadas por palitos fósforos, rectángulos isoperimétricos, boletas de servicios (agua, luz, teléfono, etc.), Ley de Hooke, rendimiento de un automóvil, arriendo de autos, etc. El propósito central de tratar estos problemas, es mostrar que la función lineal y afín, permite modelar este tipo de situaciones y en este escenario, la ecuación de la recta es uno de los elementos esenciales del proceso de análisis y solución de estas tareas. Por lo tanto, en cada problema se estudian cuestiones tales como:

- ✓ Detección de variables y clasificación de ellas en dependientes e independientes.
- ✓ Elaboración de tablas de registro de datos.
- ✓ Representación gráfica de la información suministrada por la tabla.
- ✓ Forma y posición relativa de las gráficas.
- ✓ La necesidad de unir los puntos de una grafica.
- ✓ Determinación de los valores permitidos para las variables analizadas.
- ✓ Detección del modelo matemático.
- ✓ Utilización del modelo matemático para calcular el valor de alguna de las variables en función de la otra.

¿Por qué elegimos la situación de la cuenta de electricidad?

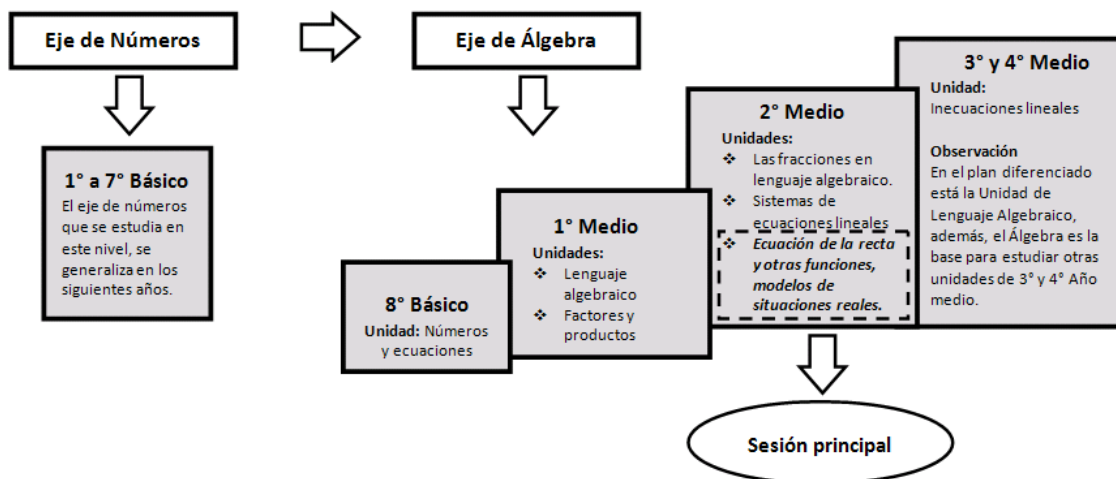
Una de las razones de haber elegido esta situación, es que se presenta la Matemática más cercana a la realidad del alumno, desde donde podemos generalizar el concepto de ecuación de la recta. En particular, cualquier cuenta de un servicio básico sirve como un potencial ejemplo para presentar el concepto matemático de función afín y lineal. Además, se ha venido estudiando a lo largo de varias sesiones, por ejemplo: graficar el modelo de la cuenta de electricidad, encontrar el modelo matemático asociado, analizar la posición relativa de una recta en el plano, calcular e interpretar la pendiente de una recta. En cambio, las otras situaciones que se estudian, pueden

presentar obstáculos que desvíen la atención de los alumnos. En la secuencia figuras formadas por fósforos, la variable independiente puede tomar solo valores enteros y positivos, o en los rectángulos isoperimétricos, esta variable está restringida a un intervalo. Siendo hechos interesantes de analizar con los alumnos, creemos que no es pertinente considerarlos en la sesión elegida. Por último, en el contexto de los objetivos transversales del Marco Curricular de Chile, es interesante presentar a la Matemática como una herramienta de análisis de un recurso tan valioso para la sociedad actual.

En la primera parte este informe, se da una mirada general a la secuencia del eje de Geometría a través de la Enseñanza Básica y Media. Posteriormente, se describe la secuencia de las sesiones necesarias para tratar el tema elegido en esta oportunidad, considerando las sesiones previas y posteriores a la clase principal. En tercer lugar, se describe la sesión principal, considerando diversos aspectos del saber matemático y de los elementos didácticos involucrados. Luego se pasa al análisis de las organizaciones: matemática y didáctica. En la última parte de este trabajo se encontrarán los recursos necesarios para implementar esta propuesta: guías de aprendizaje, recursos tecnológicos y material de referencia.

1. El álgebra en la Enseñanza Básica y Media

El siguiente esquema permite apreciar el desarrollo de la enseñanza del Álgebra en la enseñanza Básica y Media del sistema educacional de Chile, además nos indica la unidad en que la Sesión Principal se diseñó para este trabajo final de la Pasantía:



La secuencia y sesión principal de este trabajo, se planificó en el contexto de la unidad de: *“Ecuación de la recta y otras funciones, modelos de situaciones diarias”*.

En general, en los primeros siete años de Enseñanza Primaria, se desarrollan habilidades conceptuales y procedimentales, relacionadas con el eje de Números; las cuales permitirán, posteriormente, generalizar los conceptos aritméticos a través del estudio del Álgebra.

Octavo Año Básico

La resolución de problemas mediante una ecuación, se introduce en este nivel con el propósito de que los números enteros negativos y las operaciones que con ellos se pueden realizar, aparezcan como una herramienta que permita comprender y resolver nuevos problemas que sin éstos no sería posible abordar adecuadamente.

Primer Año Medio

En este nivel se profundizan los conceptos algebraicos a través del estudio de dos unidades: *“Lenguaje Algebraico”* y *“Factores y Productos”*. Preferentemente, se propone estudiar expresiones algebraicas en el contexto de los números enteros; además, se profundiza el tema de ecuaciones y resolución de problemas de planteo vistos en el nivel anterior. El propósito principal es hacer una generalización de las situaciones provenientes de la aritmética, de la vida diaria y de contextos geométricos

Segundo Año Medio

La unidad de “Las Fracciones en Lenguaje Algebraico”, es la continuación de las unidades relativas a lenguaje algebraico de Primer Año Medio, focaliza el aprendizaje en la relación entre la aritmética y el álgebra, en especial en el ámbito de las fracciones; en el uso y la interpretación de la sintaxis del lenguaje algebraico enfatizando el concepto de potencia con exponente entero y la operatoria con expresiones fraccionarias.

Con respecto a la unidad “Ecuación de la Recta y otras Funciones”, durante Primer Año Medio, los estudiantes resolvieron y analizaron problemas de proporcionalidad directa que involucraban constantes de proporcionalidad positiva y también valores positivos para las variables x e y .

Durante este año, este modelo se extenderá a la función $y = mx + n$. Para apoyar este proceso será necesario analizar una diversidad de situaciones de variados ámbitos: naturaleza, tecnología, ciencias, gestión, de la vida cotidiana, etc., para construir el modelo y expresarlo por medio de tablas de valores, a través de una expresión algebraica y en forma gráfica, estableciendo las relaciones entre estas formas de representación.

En el desarrollo de la unidad de Sistemas de Ecuaciones Lineales, se propone su enseñanza estrechamente ligada a la resolución de problemas; que las ecuaciones y las letras involucradas representen objetos que les den significado a la operatoria que con ellas se realizan.

Tercer y Cuarto Año Medio

Los conocimientos algebraicos tratados en años anteriores, permiten profundizar el estudio de otros ejes temáticos, tales como: Funciones, Geometría y Estadística. Particularmente, en tercer año medio, se incluye el estudio de las inecuaciones lineales con una variable.

Hay que destacar que el estudio del Álgebra, se enfatiza en el plan diferenciado mediante la unidad “*Profundización del Lenguaje Algebraico*”; para, posteriormente, aplicarlo a otras unidades más específicas.

La evolución de la enseñanza del Álgebra en la Educación Básica y Media, permite que los alumnos y alumnas, aparte de prepararse para la vida como ciudadano, tengan la oportunidad de continuar con estudios de Matemáticas Superiores, ya sea en el ámbito profesional o académico.

2. Secuencia de sesiones

Sesiones previas	Descripción
1	Analizar la posición relativa de una recta a partir de su ecuación principal, interpretando los coeficientes m y n en la gráfica. Construir esquema de resumen. Trabajo en sala de informática con un software geométrico ¹ .
2	Clase destinada a trabajar el concepto de pendiente a partir de las coordenadas de los puntos de la recta. Este concepto se presenta en el contexto del problema de la cuenta de electricidad visto en sesiones anteriores. El trabajo de los estudiantes se orientará de modo que deduzcan una fórmula para el cálculo de la pendiente, a partir de las coordenadas de dos puntos de la recta, y de acuerdo con su valor, se analizará la posición relativa de la recta. Se apoyará el trabajo con un software geométrico ¹ .
Sesión principal	Descripción
3	Reconocer la necesidad de contar con un método para encontrar la ecuación de una recta a partir de dos de sus puntos y deducir dicho procedimiento. Para ello el trabajo se apoyará en el problema de la cuenta de luz y, desde este caso particular, se generalizará la técnica descubierta. Apoyo mediante una guía de aprendizaje ¹
Sesiones posteriores	Descripción
4	<p>En esta sesión se seguirá profundizando la técnica construida en la clase anterior, lo cual permitirá tratar cuestiones tales como:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Analizar la ecuación de rectas de pendiente positiva, negativa, cero y no definida. • Introducir el concepto de ecuación general y deducir que el procedimiento en estudio, permite obtener una infinidad de ecuaciones escritas bajo esta forma, pero que la ecuación principal es única. • La importancia de contar con este tipo de técnicas, no solo para resolver problemas de la vida diaria, sino que para poder seguir avanzando en el estudio de otros conceptos asociados (rectas paralelas y perpendiculares, interpretación gráfica del conjunto solución de un sistema de ecuaciones).

¹ Ver documentos de referencia

5	<p>Deducir la técnica para encontrar la ecuación de una recta a partir de la pendiente y un punto de ella. La idea es que este procedimiento sea una consecuencia de lo estudiado en las dos sesiones anteriores.</p> <p>Se considera, además, el inicio de una fase de automatización de lo estudiado en estas últimas sesiones, mediante una guía de trabajo²</p>
6	<p>Se continúa con la fase de automatización y se preparan para el momento de la evaluación.</p>
7	<p>Evaluación escrita</p>

² Ver documentos de referencia

3. Sesión principal

Contenido: Ecuación de la recta dados dos puntos

Conocimientos previos: Fracciones algebraicas y ecuaciones fraccionarias. Variable dependiente e independiente, modelos matemáticos de situaciones de la vida diaria, tabla de valores, función lineal y afín, pendiente de la recta, coeficiente de posición.

Objetivo de la sesión: Deducir la fórmula de la ecuación de la recta dados dos puntos, a través del análisis de una situación cotidiana.

Aprendizajes esperados:

Los alumnos y alumnas:

- ✓ Analizan situaciones y fenómenos que se pueden modelar utilizando las funciones lineal, afín o escalonada; establecen la dependencia entre las variables y la expresan gráfica y algebraicamente.
- ✓ Conocen la expresión algebraica y gráfica de las funciones lineal y afín; traducen de un registro a otro.

Descripción general de la Sesión

Tiempo estimado: 90 minutos

Inicio

El Profesor inicia la clase entregando a los alumnos y alumnas la guía de trabajo N° 1, luego explica el trabajo a realizar y pide a algún estudiante que lea los aprendizajes esperados. El docente aprovecha de preguntar a algunos alumnos si entendieron lo que se espera de ellos y qué conocimientos previos deben poner en marcha, por ejemplo: ¿cómo calcular la pendiente de una recta a partir de dos puntos de ella?, ¿qué sucede con el valor de la pendiente de acuerdo con la posición de la recta? En base a las respuestas de los alumnos, registrará la fórmula y un esquema con las posiciones relativas de las rectas en la pizarra. Luego les pide que se junten en parejas y desarrollen la guía de trabajo.

Desarrollo

Actividad N° 1

Tiempo estimado: 40 minutos

Los alumnos comienzan leyendo el enunciado del siguiente problema:

A continuación analizaremos el problema sobre las facturas de la cuenta de electricidad de tres familias distintas correspondiente a la empresa distribuidora Chilquinta, durante el mes de Marzo del 2011.

La siguiente tabla nos da los datos del consumo y pago realizado por estas familias:

Familias	Energía eléctrica Kwh	Valor total a pagar \$
Luna	77	9.632
Pavez	121	14.604
Ruiz	50	6.581

El profesor comprueba que los estudiantes han comprendido éste enunciado. Para este propósito pide a varios alumnos que expliquen de qué se trata el problema y luego les indica que continúen con la actividad, la cual plantea las siguientes interrogantes:

- a) *A partir de los datos de la tabla construya la gráfica correspondiente.*
- b) *¿Cuál es la interpretación gráfica de los datos de cada cliente?*
- c) *¿Cuál el valor del Kwh?*
- d) *Supongamos que el Sr. Reyes, vecino de la familia Ruiz, no le llega la cuenta de electricidad. Como no sabe cuánto pagar, anota las lecturas del medidor del mes anterior 40.907 Kwh y la actual 41.106 Kwh. Si acude hasta la oficina de pago para solicitar la facturación del mes de Marzo, determina:*
 - ✓ *Los Kwh consumidos por la familia Reyes.*
 - ✓ *¿Cuánto deberá pagar este mes?*
- e) *Si el vecino de la Familia Luna canceló \$9.971 por la cuenta del mes de Marzo, ¿cuántos Kw/h consumió durante este mes?*
- f) *La empresa Chilquinta, para emitir las facturas de sus clientes, debe usar un modelo matemático, en el cual los datos de un cliente cualquiera se representan por:*
 - ✓ *x la energía consumida en Kwh.*
 - ✓ *y el valor total a pagar en pesos.**Encuentra el modelo utilizado por la empresa Chilquinta.*
- g) *¿Cuál es el número mínimo de clientes necesarios para encontrar la ecuación del problema? Fundamente su respuesta.*

Terminada esta primera parte, el profesor junto a los alumnos realizan una síntesis del trabajo realizado. Se comentan las preguntas y se orienta la discusión hacia la validación de la técnica utilizada para encontrar el modelo matemático, con que la empresa eléctrica hace sus cobros mensuales a sus clientes. El profesor saca a la pizarra a algún estudiante a registrar su procedimiento y aprovecha de mostrar a la clase otras alternativas de solución.

Actividad N° 2

Tiempo estimado: 40 minutos

El profesor pide a los alumnos continuar con la guía de trabajo, pero verificando que comprenden las instrucciones. Para este efecto solicita a ciertos alumnos que le expliquen a sus compañeros de que se trata la segunda actividad.

En primer lugar, los alumnos deben poner en acción la técnica construida en la actividad anterior, pero en una situación general, esto es, que no corresponde a ningún problema en particular.

“Encuentre la ecuación de la recta pasa por los puntos A(1,5) y B(15,103)”.

Posteriormente, deben aplicar el procedimiento a una situación más general, es decir, encontrar la ecuación de una recta a partir de dos puntos cualesquiera. Por ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta si conocemos sólo dos puntos de ella.

Ayuda

- ✓ *Suponga que los puntos conocidos se representan por $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$, y un punto genérico $B(x, y)$ perteneciente a la misma recta.*
- ✓ *Graficalos.*
- ✓ *Ayúdate de la síntesis que hiciste en la actividad N° 1 y del trabajo del ejercicio anterior.*

Cierre

Tiempo estimado: 10 minutos

Para finalizar la sesión, nuevamente los estudiantes junto al profesor, sintetizan el trabajo realizado y comentan los procedimientos utilizados. Por una parte se comenta el hecho de por qué los puntos deben tener abscisas distintas, y por otra parte, se registran en la pizarra los procedimientos utilizados por los estudiantes. Además, se destaca que la técnica que emergió en esta clase no solo permite contestar a cuestiones de la vida real, sino que se convierte en una herramienta que permitirá en el futuro seguir desarrollando nuevos aprendizajes, por ejemplo: condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas, desafíos en contexto de la ecuación de la recta, la interpretación gráfica del conjunto solución de un sistema de ecuaciones. Se apoya este trabajo de síntesis mediante el procesador geométrico Geogebra.

Análisis a priori de la sesión

Se escoge trabajar esta situación ya que se presenta la matemática de una forma más cercana a la realidad del alumno, en particular, cualquier cuenta de un servicio básico sirve como un potencial ejemplo para presentar este concepto matemático.

Además es una situación que se ha venido estudiando a lo largo de varias sesiones, por ejemplo: graficar el modelo de la cuenta de electricidad, encontrar el modelo matemático, analizar la posición relativa de una recta en el plano, calcular e interpretar la pendiente de una recta. Por lo tanto creemos que la situación misma no es un factor que desvíe la atención del alumno y lo enfoca directamente en el aprendizaje esperado para esta sesión.

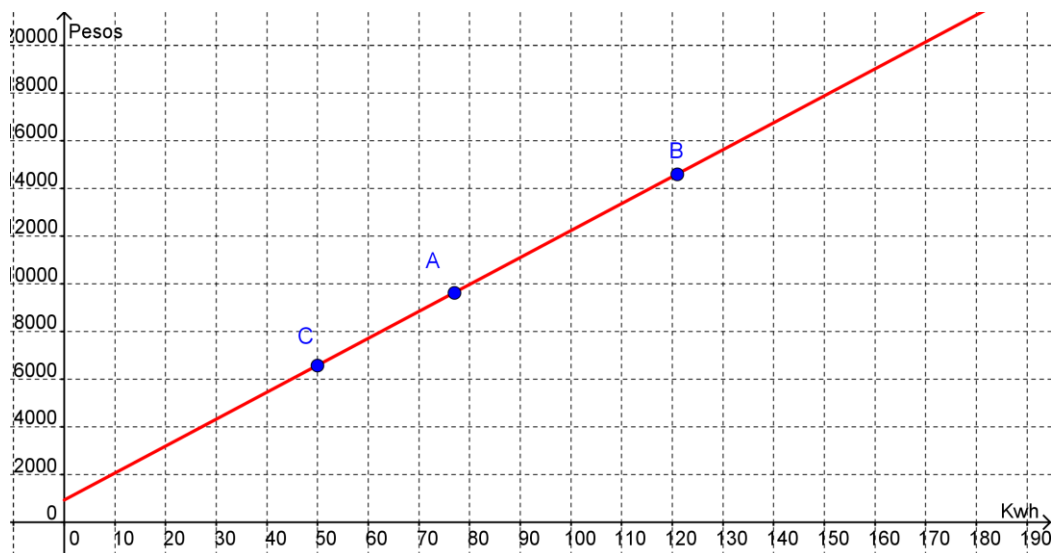
Actividad N° 1

Se parte de una situación concreta, pues siempre se presenta la ecuación de la recta de manera abstracta.

Las preguntas que se van formulando en la guía de aprendizaje, están estructuradas de modo que el alumno, gradualmente, pase de lo concreto a lo abstracto.

- a) Esta pregunta tiene por finalidad que el estudiante recurra a una representación gráfica de la información disponible.

Gráfico de la cuenta de electricidad

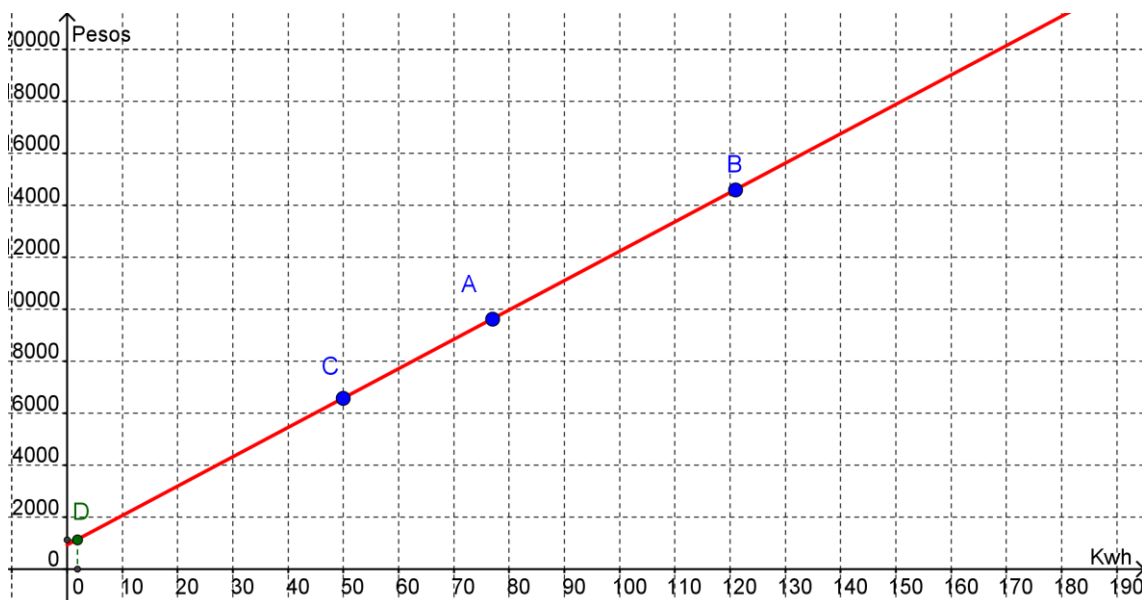


Cada punto corresponde a la información sobre el consumo de energía de cada cliente, donde la abscisa representa el consumo en Kw/h, y la ordenada, el valor a pagar.

- b) El cálculo del Kwh ya fue trabajado en la sesión anterior, y permite activar el conocimiento previo de pendiente, que es fundamental para deducir la ecuación de la recta.

Método 1: Mediante la comparación entre pendientes e introduciendo un punto llamado D (1, d)

Gráfico de la cuenta de electricidad



$$m_{AB} = \frac{9632 - 6581}{77 - 50} = \frac{3051}{27} = 113 \quad m_{BC} = \frac{14604 - 9632}{121 - 77} = \frac{4972}{44} = 113 \quad m_{AC} = \frac{14604 - 6581}{121 - 50} = \frac{8023}{71} = 113$$

Así realizando el mismo trabajo anterior tenemos 3 posibles resoluciones:

$$\begin{array}{ccc} m_{DA} = m_{AB} & m_{DA} = m_{BC} & m_{DA} = m_{AC} \\ \frac{6581 - d}{50 - 1} = 113 & \frac{6581 - d}{50 - 1} = 113 & \frac{6581 - d}{50 - 1} = 113 \\ d = 1044 & d = 1044 & d = 1044 \end{array}$$

Método 2: Mediante la proporcionalidad de las diferencias entre dos valores de una variable con las diferencias de los dos valores correspondientes de la otra variable, tenemos nueve casos:

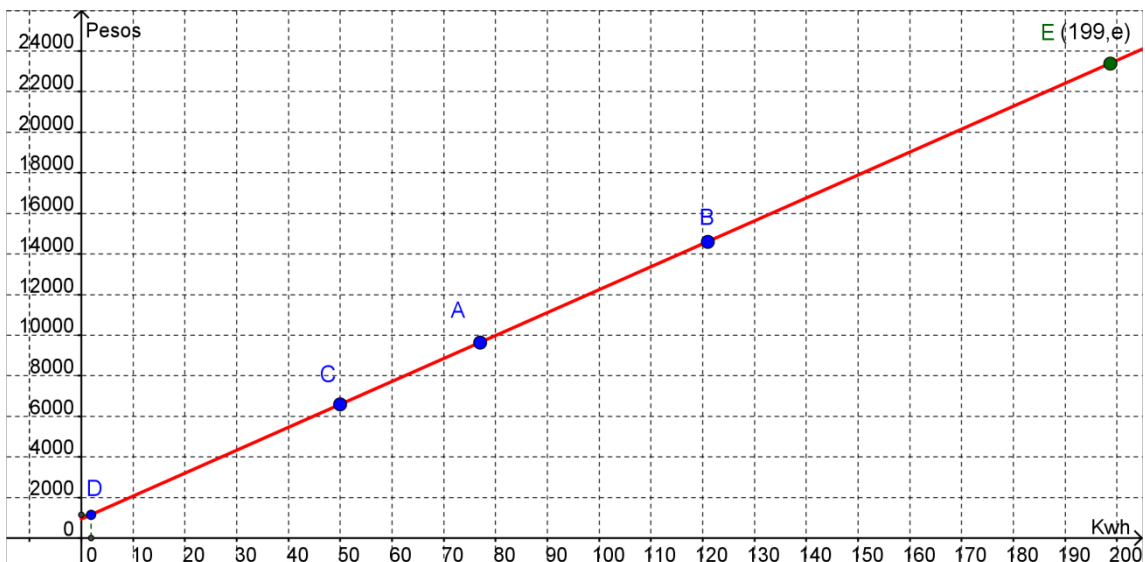
Familias	Energía eléctrica Kwh	Valor total a pagar \$
Luna	77	9.632
Pavez	121	14.604
Ruiz	50	6.581
Valor Kwh	1	d

$\frac{50-1}{121-50} = \frac{6581-d}{14604-6581}$ $\frac{49}{71} = \frac{6581-d}{8023}$ $d = 1044$	$\frac{50-1}{77-50} = \frac{6581-d}{9632-6581}$ $\frac{49}{27} = \frac{6581-d}{3051}$ $d = 1044$	$\frac{50-1}{77-121} = \frac{6581-d}{9632-14604}$ $\frac{49}{44} = \frac{6581-d}{4972}$ $d = 1044$
$\frac{121-1}{121-50} = \frac{14604-d}{14604-6581}$ $\frac{120}{71} = \frac{14604-d}{8023}$ $d = 1044$	$\frac{121-1}{77-50} = \frac{14604-d}{9632-6581}$ $\frac{120}{27} = \frac{14604-d}{3051}$ $d = 1044$	$\frac{121-1}{77-121} = \frac{14604-d}{9632-14604}$ $\frac{120}{44} = \frac{14604-d}{4972}$ $d = 1044$
$\frac{77-1}{121-50} = \frac{9632-d}{14604-6581}$ $\frac{76}{71} = \frac{9632-d}{8023}$ $d = 1044$	$\frac{77-1}{77-121} = \frac{9632-d}{9632-14604}$ $\frac{76}{44} = \frac{9632-d}{4972}$ $d = 1044$	$\frac{77-1}{77-50} = \frac{9632-d}{9632-6581}$ $\frac{76}{27} = \frac{9632-d}{3051}$ $d = 1044$

c) Las dos interrogantes siguientes, están enfocadas a que surja la necesidad de utilizar una ecuación fraccionaria a partir de la igualdad de las pendientes de la recta.

- ✓ Los Kw/h consumidos por la familia Reyes fueron $41.106 - 40.907 = 199$
- ✓ Mediante igualación de pendientes (método 1 ya visto) para calcular el valor de 199 Kwh se necesita otro punto que llamaremos E (199, e).

Gráfico de la cuenta de electricidad



$$m_{AB} = \frac{9632-6581}{77-50} = \frac{3051}{27} = 113 \quad m_{BC} = \frac{14604-9632}{121-77} = \frac{4972}{44} = 113 \quad m_{AC} = \frac{14604-6581}{121-50} = \frac{8023}{71} = 113$$

$$m_{AD} = \frac{6581-1044}{50-1} = 113 \quad m_{CD} = \frac{14604-1044}{121-1} = 113 \quad m_{BD} = \frac{9632-1044}{77-1} = 113$$

Así realizando el mismo trabajo anterior tenemos seis posibles casos:

$$\begin{array}{ccc} m_{EA} = m_{AB} & m_{EA} = m_{BC} & m_{EA} = m_{AC} \\ \frac{6581-e}{50-199} = 113 & \frac{6581-e}{50-199} = 113 & \frac{6581-e}{50-199} = 113 \\ e = 23418 & e = 23418 & e = 23418 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} m_{EA} = m_{AD} & m_{EA} = m_{CD} & m_{EA} = m_{BD} \\ \frac{6581-e}{50-199} = 113 & \frac{6581-e}{50-199} = 113 & \frac{6581-e}{50-199} = 113 \\ e = 23418 & e = 23418 & e = 23418 \end{array}$$

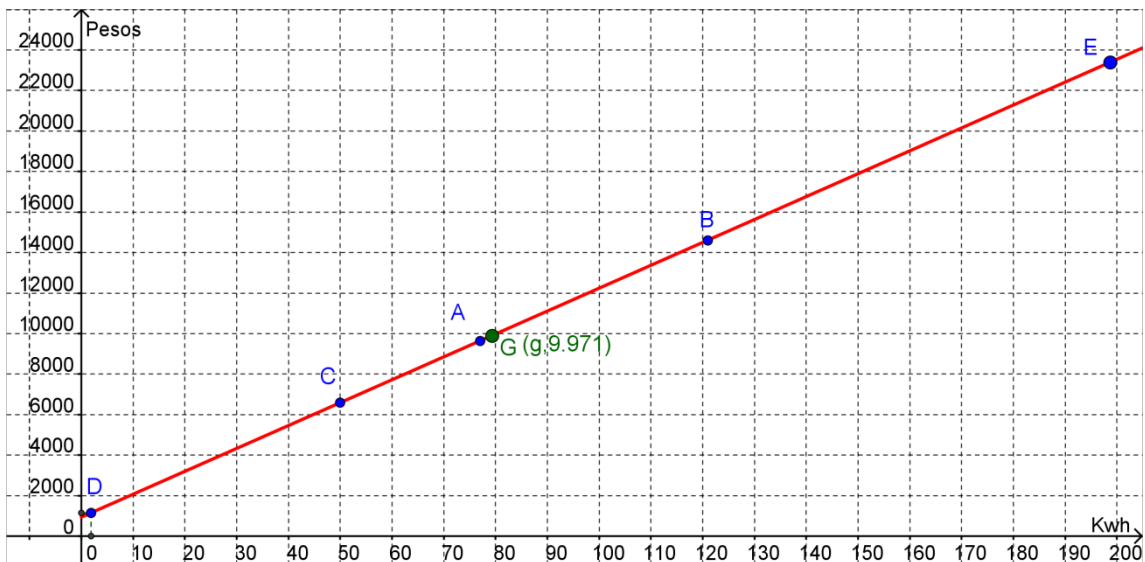
De la misma forma (método 2), aparecen ahora doce posibles métodos de resolución, de los cuales sólo mostraremos tres:

Familias	Energía eléctrica Kwh	Valor total a pagar \$
Luna	77	9.632
Pavez	121	14.604
Ruiz	50	6.581
Valor kw/h	1	1044
Sr. Reyes	199	e

$\frac{77-199}{77-121} = \frac{9632-e}{9632-14604}$ $\frac{122}{44} = \frac{9632-e}{-4972}$ $e = 23418$	$\frac{1-199}{121-50} = \frac{1044-e}{14604-6581}$ $\frac{-198}{71} = \frac{1044-e}{8023}$ $e = 23418$	$\frac{50-199}{77-50} = \frac{6581-e}{9632-6581}$ $\frac{-149}{27} = \frac{6581-e}{3051}$ $e = 23418$
---	--	---

d) Mediante igualación de pendientes: (método 1 anterior) Para calcular los Kwh consumidos, si se pagan \$9.971, se necesita otro punto que llamaremos G (g, 9.971)

Gráfico de la cuenta de electricidad



$$m_{AB} = \frac{9632 - 6581}{77 - 50} = \frac{3051}{27} = 113 \quad m_{BC} = \frac{14604 - 9632}{121 - 77} = \frac{4972}{44} = 113 \quad m_{AC} = \frac{14604 - 6581}{121 - 50} = \frac{8023}{71} = 113$$

$$m_{AD} = \frac{6581 - 1044}{50 - 1} = 113 \quad m_{CD} = \frac{14604 - 1044}{121 - 1} = 113 \quad m_{BD} = \frac{9632 - 1044}{77 - 1} = 113$$

$$m_{AE} = \frac{6581 - 23418}{50 - 199} = 113 \quad m_{BE} = \frac{9632 - 23418}{77 - 199} = 113 \quad m_{CE} = \frac{14604 - 23418}{121 - 199} = 113$$

$$\begin{array}{ccc} m_{EG} = m_{AB} & m_{EG} = m_{BC} & m_{EG} = m_{AC} \\ \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 & \frac{6581 - 23418}{g - 199} = 113 & \frac{6581 - g}{50 - 199} = 113 \\ g = 80 & g = 80 & g = 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} m_{EG} = m_{AD} & m_{EG} = m_{CD} & m_{EG} = m_{BD} \\ \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 & \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 & \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 \\ g = 80 & g = 80 & g = 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} m_{EG} = m_{AE} & m_{EG} = m_{BE} & m_{EG} = m_{CE} \\ \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 & \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 & \frac{9971 - 23418}{g - 199} = 113 \\ g = 80 & g = 80 & g = 80 \end{array}$$

Aplicando el método 2, de todas las posibles resoluciones, sólo mostraremos tres:

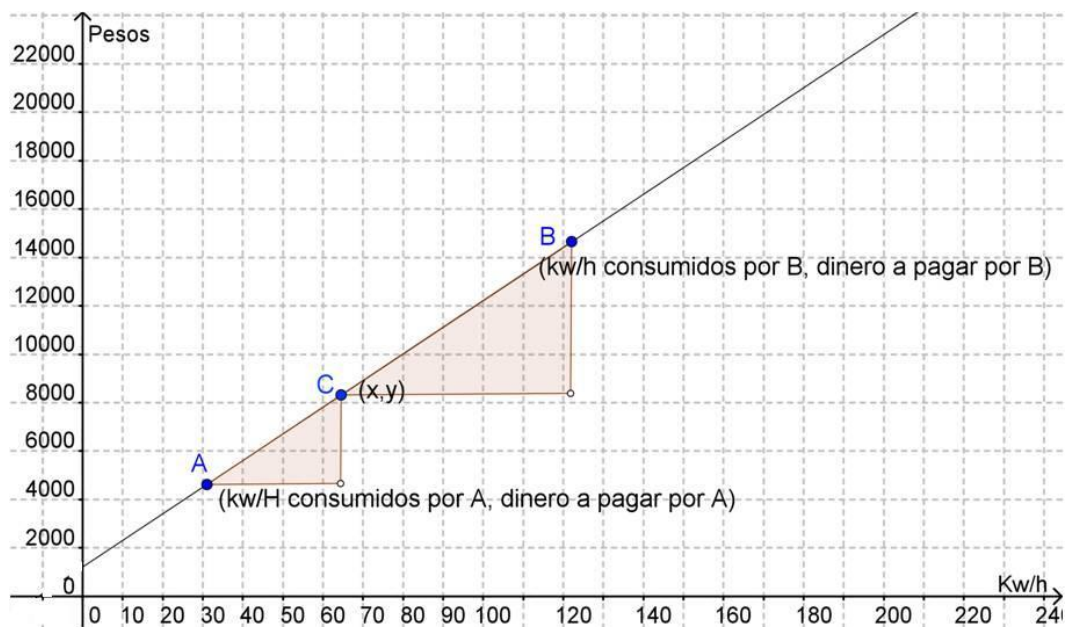
Familias	Energía eléctrica Kwh	Valor total a pagar \$
Luna	77	9.632
Pavez	121	14.604
Ruiz	50	6.581
Valor kw/h	1	1044
Sr. Reyes	199	23418
Flia. Luna	g	9971

$\frac{77-g}{77-121} = \frac{9632-9971}{9632-14604}$ $\frac{77-g}{-44} = \frac{-339}{-4972}$ $g = 80$	$\frac{77-g}{50-1} = \frac{9632-9971}{6581-1044}$ $\frac{77-g}{49} = \frac{-339}{5537}$ $g = 80$	$\frac{77-g}{121-1} = \frac{9632-9971}{14604-1044}$ $\frac{77-g}{120} = \frac{-339}{13560}$ $g = 80$
---	--	--

e) Método 1: Por igualación de pendientes.

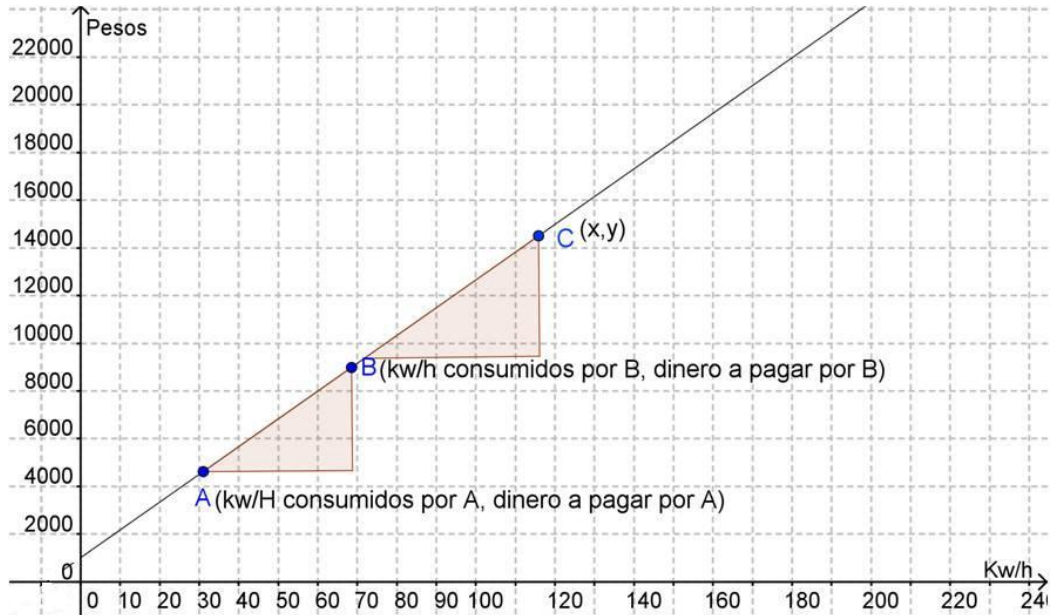
Esta pregunta es clave, pues permite que emerja la técnica necesaria para encontrar el modelo matemático de la factura de electricidad. Los alumnos se pueden apoyar del análisis de la representación gráfica de la situación.

Gráfica de la cuenta de electricidad



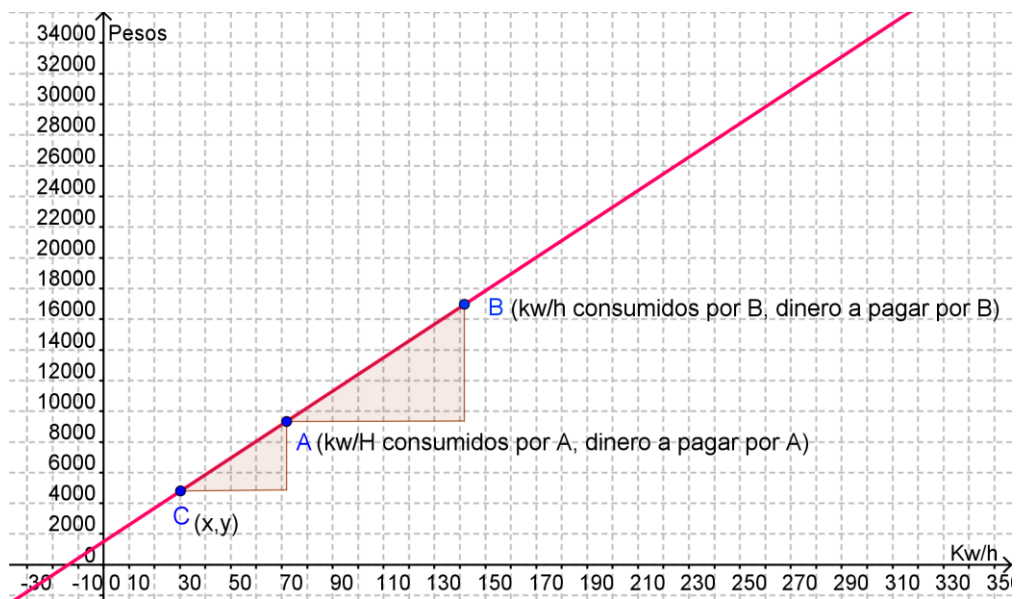
$$\frac{\$ \text{ a pagar por B} - y}{\text{kw/h consumidos por B} - x} = \frac{\$ \text{ a pagar por B} - \$ \text{ a pagar por A}}{\text{kw/h consumidos por B} - \text{kw/h consumidos por A}}$$

Gráfico de la cuenta de electricidad



$$\frac{y - \$ \text{ a pagar por B}}{x - \text{kw/h consumidos por B}} = \frac{\$ \text{ a pagar por B} - \$ \text{ a pagar por A}}{\text{kw/h consumidos por B} - \text{kw/h consumidos por A}}$$

Gráfico de la cuenta de electricidad



$$\frac{\$ \text{ a pagar por B} - \$ \text{ a pagar por A}}{\text{kw/h consumidos por B} - \text{kw/h consumidos por A}} = \frac{\$ \text{ a pagar por A} - y}{\text{kw/h consumidos por A} - x}$$

Método 2: Por proporción entre diferencias de variables.

Los alumnos se pueden apoyar en la siguiente tabla

<i>Familias</i>	<i>Energía eléctrica Kwh</i>	<i>Valor total a pagar \$</i>
A	<i>Kw/h consumido por la familia A</i>	<i>\$ a pagar por la familia A</i>
B	<i>Kw/h consumido por la familia B</i>	<i>\$ a pagar por la familia B</i>
C	x	y

$$\frac{\$ \text{ a pagar por B} - \$ \text{ a pagar por A}}{\text{kw/h consumidos por B} - \text{kw/h consumidos por A}} = \frac{\$ \text{ a pagar por A} - y}{\text{kw/h consumidos por A} - x}$$

<i>Familias</i>	<i>Energía eléctrica Kwh</i>	<i>Valor total a pagar \$</i>
A	<i>Kw/h consumido por la familia A</i>	<i>\$ a pagar por la familia A</i>
B	x	y
C	<i>Kw/h consumido por la familia C</i>	<i>\$ a pagar por la familia C</i>

$$\frac{y - \$ \text{ a pagar por C}}{x - \text{kw/h consumidos por C}} = \frac{\$ \text{ a pagar por A} - \$ \text{ a pagar por C}}{\text{kw/h consumidos por A} - \text{kw/h consumidos por C}}$$

<i>Familias</i>	<i>Energía eléctrica Kwh</i>	<i>Valor total a pagar \$</i>
A	x	y
B	<i>Kw/h consumido por la familia B</i>	<i>\$ a pagar por la familia B</i>
C	<i>Kw/h consumido por la familia C</i>	<i>\$ a pagar por la familia C</i>

$$\frac{y - \$ \text{ a pagar por la familia B}}{x - \text{kw/h consumido por la familia B}} = \frac{\$ \text{ a pagar por B} - \$ \text{ a pagar por C}}{\text{kw/h consumidos por B} - \text{kw/h consumidos por C}}$$

- f) La información entregada al alumno es redundante, por lo tanto es necesario que reflexione a cerca del mínimo de datos que le permiten encontrar dicho modelo o ecuación.

El número mínimo de clientes necesarios para encontrar la ecuación de la recta que modela la situación de una cuenta de electricidad es dos.

Esto se puede visualizar a partir de los cálculos realizados, por ejemplo, al establecer la igualdad de pendientes entre segmentos determinados por pares de puntos pertenecientes a una misma recta, independientemente, de la cantidad de casos posibles de cálculos, siempre se comparan dos resultados para obtener la ecuación de la recta.

Actividad N° 2

Esta situación fue elegida para que el estudiante automatice la técnica, y a la vez, avance hacia la abstracción. Ya sea por igualdad de pendientes o por proporcionalidad de las diferencias entre las variables, se obtienen los mismos resultados

Primera parte

Método I: dado $C(x,y)$

$$\frac{103-y}{15-x} = \frac{103-5}{15-1} \quad \text{Llegando finalmente a la forma} \quad y = 7x - 2$$

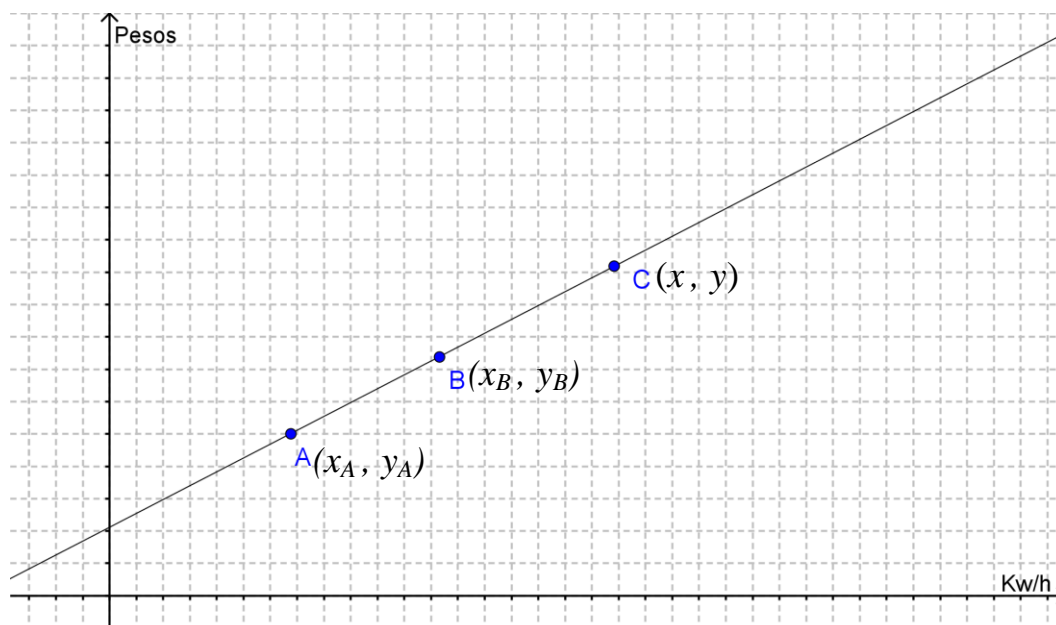
Método II: dado $C(x,y)$

$$\frac{y-103}{x-15} = \frac{103-5}{15-1} \quad \text{Llegando finalmente a la forma} \quad y = 7x - 2$$

Método III: dado $C(x,y)$

$$\frac{103-5}{15-1} = \frac{5-y}{1-x} \quad \text{Llegando finalmente a la forma} \quad y = 7x - 2$$

Segunda parte



Utilizando la técnica de la igualación de las pendientes, se obtiene:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O bien, otras expresiones análogas que puedan surgir.

Dificultades para el Profesor:

Identificar todos los posibles métodos utilizados por los alumnos para responder a las interrogantes planteadas.

Dificultades para los Alumnos:

Pregunta (a):

- ✓ Identificación de variables dependientes e independientes.
- ✓ Ubicación de las variables en un sistema de coordenadas. (Kwh: abscisa, Valor a pagar: ordenada). Pues los estudiantes pueden ubicar la variables Valor a pagar en el Eje X, y los Kwh en el Eje Y.

Pregunta (b):

- ✓ Plantear una solución como una proporcionalidad directa. Los alumnos no recuerdan que la situación planteada no corresponde a una función lineal.
- ✓ Cálculo de pendientes. Uso incorrecto de la fórmula, por ejemplo:
 - i. Realizando el cociente entre la diferencia de las abscisas y la diferencia de las ordenadas $m = \frac{77-50}{9632-6581}$
 - ii. Haciendo la diferencia entre las coordenadas de cada punto
 $m = \frac{77-9632}{50-6581}$
 - iii. No respeta el orden de los puntos

- ✓ Dificultad para reconocer la igualdad entre las pendientes.

Preguntas (c) y (d):

- ✓ Reemplazar valores en la expresión algebraica de la pendiente.
- ✓ Despejar incógnitas.

Pregunta (e):

Escribir la ecuación de la recta en la forma $y = mx + n$.

Pregunta (f):

Considerar que la información mínima es la que entrega la tabla, pues no están acostumbrados a analizar los datos redundantes en el enunciado de una determinada situación.

4. Análisis didáctico de la sesión

Organización Matemática

Objeto del estudio: Ecuación de la Recta que pasa por dos puntos

Tarea

T: Encontrar la ecuación de una recta.

Tipos de Tareas:

T₁: Determinar los Kwh conociendo el valor total a pagar y viceversa.

T₂: Encontrar la ecuación que modela la cuenta de electricidad.

Técnica

τ_1 :

- ✓ Calcular la pendiente de dos pares de puntos.
- ✓ Escribir una igualdad con las pendientes encontradas.
- ✓ Transformar la igualdad en una expresión sin fracciones.
- ✓ Despejar la variable correspondiente.

τ_2 :

- ✓ Construir la representación gráfica de una función lineal.
- ✓ Calcular la pendiente de una recta determinada por dos pares de puntos.
- ✓ Escribir una igualdad con las pendientes encontradas.
- ✓ Transformar la igualdad en una expresión sin fracciones.
- ✓ Despejar la variable "y", con el propósito de encontrar el modelo matemático que relacione los Kwh y el valor a pagar.

Tecnología:

θ_1 :

- ✓ Pendiente de una recta.
- ✓ Ecuación fraccionaria.

θ_2 :

- ✓ Gráfica de una recta en el plano Cartesiano.
- ✓ Pendiente de una recta.
- ✓ Ecuación fraccionaria.
- ✓ Ecuación $y = mx+n$.

Teoría:

- ✓ Función afín y lineal.
- ✓ Ecuación de la recta.

Organización Didáctica

Primer encuentro

Se presenta el problema de la Actividad N° 1, el cual da a conocer los datos de las cuentas de electricidad de tres familias. Los alumnos leen el problema y el profesor verifica a través de preguntas, que han entendido su enunciado. Se les plantea a los estudiantes una serie de interrogantes, que deben contestar mediante la utilización de distintos procesos de cálculo e interpretación de resultados, que los llevarán a encontrar el modelo matemático que relaciona las variables Kwh y valor a pagar.

Momento Exploratorio

Los alumnos analizan e intentan dar una respuesta al problema, para ello construyen la representación gráfica de los datos entregados e interpretan este resultado indicando cómo se comporta el consumo de las tres familias.

Utilizando el concepto de pendiente, los estudiantes calculan el valor del Kwh. Luego determinan el valor a pagar de una cuenta de electricidad, conocido el consumo en Kwh. De la misma forma, determinan la energía eléctrica que ocupa una familia, si se conoce el dinero deben cancelar por este consumo.

Las actividades anteriores, permiten que los estudiantes deduzcan un procedimiento que les permita encontrar el modelo matemático que relaciona la energía consumida en Kwh y el valor total a pagar. Además, determinan los elementos mínimos que son necesarios para encontrar la ecuación del problema.

Momento de Institucionalización 1

El profesor junto a los alumnos realizan una síntesis del trabajo realizado hasta el momento. Se comentan las preguntas y se orienta la discusión hacia la validación de la técnica utilizada para encontrar el modelo matemático, con que la empresa eléctrica hace sus cobros mensuales a sus clientes. El profesor saca a la pizarra a algún estudiante a registrar su procedimiento y aprovecha de mostrar a la clase otras alternativas de solución.

Momento del Trabajo de la Técnica

En la primera pregunta de la Actividad N° 2, se propone a los estudiantes encontrar la ecuación de una recta en un contexto más general, en donde se conocen las coordenadas de dos puntos de la recta. Para este propósito, los alumnos utilizan las conclusiones de la síntesis del trabajo realizado anteriormente.

Momento Tecnológico - Teórico

En la segunda pregunta de la actividad N°2, se plantea encontrar la ecuación de la recta dados dos puntos cualesquiera y un tercer punto de coordenadas genéricas. Con lo cual se pretende que los alumnos, después de una serie de procedimientos algebraicos deduzcan la ecuación de la recta.

Momento de Institucionalización 2

Para finalizar la sesión, nuevamente los estudiantes junto al profesor, sintetizan el trabajo realizado y comentan los procedimientos utilizados. Por una parte se comenta el hecho de por qué los puntos deben tener abscisas distintas, y por otra parte, se registran en la pizarra los procedimientos utilizados por los estudiantes. Además, se destaca que la técnica que emergió en esta clase no solo permite contestar a cuestiones de la vida real, sino que se convierte en una herramienta que permitirá en el futuro seguir desarrollando nuevos aprendizajes, por ejemplo: condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas, desafíos en contexto de la ecuación de la recta, la interpretación gráfica del conjunto solución de un sistema de ecuaciones.

Momento de Evaluación

No se emplea este momento en esta sesión.

Conclusiones

Este trabajo final nos ha permitido plasmar un conjunto de conocimientos adquiridos durante esta pasantía, a través del diseño una propuesta adecuada a las necesidades de los alumnos y que les permitirá elaborar re-construcciones personales de objetos matemáticos, dentro de un contexto de aprendizaje significativo y con sentido, tarea que habitualmente no es fácil. La situación propuesta, tiene como propósito que los estudiantes puedan encontrar un procedimiento apropiado para encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos de ella, pero partiendo de los conocimientos que ellos ya poseen y de una situación que les resulta familiar. Para ello hemos planteado enunciados con las siguientes características:

- ✓ Fáciles de comprender de modo que el alumno sea capaz de pensar en una posible respuesta al problema, es decir, que la situación no presente un problema en sí mismo, sino que sea un medio para lograr los objetivos planteados.
- ✓ Las respuestas no son evidentes, pero dados sus conocimientos, el alumno puede intentar una respuesta parcial.
- ✓ Para contestar en su totalidad a la situación planteada, el estudiante se verá obligado a construir por sí mismo el conocimiento que el profesor quiere enseñar.
- ✓ Es posible utilizar más de un camino, sin embargo, las posibilidades que le son ofrecidas no son demasiado grandes. Estas condiciones eliminan, por ejemplo, plantear un problema por medio de pequeñas preguntas a las que sólo existe una posible respuesta.

Todo lo anteriormente señalado, presume un empleo de tiempo y un trabajo de reflexión fuerte por parte del profesor. Una reflexión que debe llevarse a cabo antes, durante y después de cada clase, tomando en cuenta su experiencia, sus conocimientos, las creaciones de sus alumnos, las condiciones de trabajo, la realidad de sus alumnos, entre otras variables que influyen en la creación de un conocimiento. Es importante señalar lo importante que resulta el trabajo colaborativo entre profesores, el darse el tiempo de discutir temas y compartir experiencias. Trabajar en conjunto para el logro de aprendizajes significativos en nuestros alumnos.

Esta propuesta nos ha permitido darnos cuenta de la importancia de los momentos de reflexión a priori y posteriori de una determinada sesión. Pero, también, hemos puesto en práctica un proceso de análisis de las sesiones con un cierto nivel de sistematicidad, el cual se ha visto enriquecido por las distintas sesiones de contenidos matemáticos específicos, en donde los profesores analizaban diversos elementos didácticos de las situaciones problemáticas propuestas. En la misma dirección, las clases de Didáctica nos permitieron adquirir otra herramienta para analizar nuestras clases, considerando tanto la organización Matemática como Didáctica que deben tener nuestras planificaciones de clases.

- e) La empresa Chilquinta, para emitir las facturas de sus clientes, debe usar un modelo matemático, en el cual los datos de un cliente cualquiera se representan por:

- ✓ x la energía consumida en Kwh.
- ✓ y el valor total a pagar en pesos.

Encuentra el modelo utilizado por la empresa Chilquinta.

- f) ¿Cuál es el número mínimo de clientes necesarios para encontrar la ecuación del problema? Fundamente su respuesta.

Sintetizando lo aprendido

Junto a tu profesor y compañeros, realiza una síntesis de lo aprendido en la Actividad N° 1.

Actividad N° 2

En la actividad anterior hemos encontrado una técnica para encontrar la ecuación o modelo que representa al problema de la cuenta de luz. Ahora aplicaremos dicho procedimiento a una situación general, es decir, sin considerar un problema en particular, sino que en el contexto de la función afín y lineal.

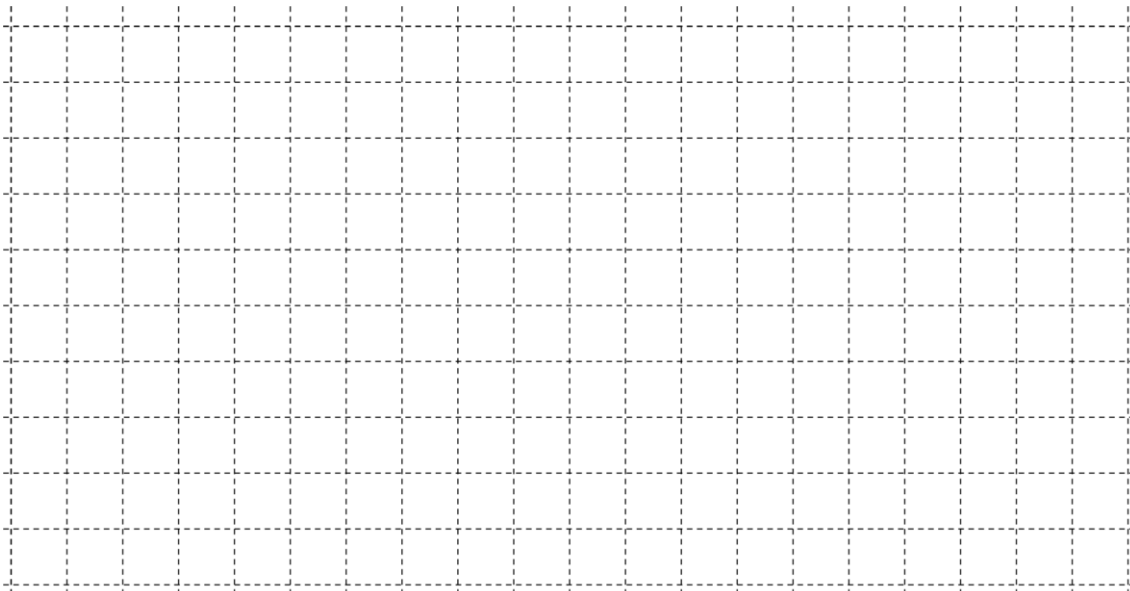
- 1) Encuentre la ecuación de la recta pasa por los puntos A(1,5) y B(15,103).



- 2) Encontrar la ecuación de la recta si conocemos sólo dos puntos de ella.

Ayuda

- ✓ Suponga que los puntos conocidos se representan por $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$, con $x_A \neq x_B$, y un punto genérico $B(x, y)$ perteneciente a la misma recta.
- ✓ Gráficelos.
- ✓ Ayúdate de la síntesis que hiciste en la actividad N° 1 y del trabajo del ejercicio anterior.



¿Por qué se exige que los dos puntos de la recta cumplan con $x_A \neq x_B$?



Sintetizando la sesión

Para finalizar, junto a tu profesor y compañeros, realicen una síntesis de lo tratado durante la clase.



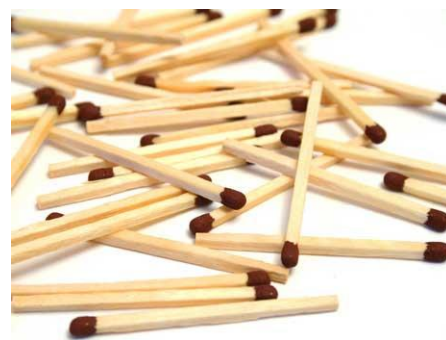
GUÍA DE TRABAJO N° 2

ECUACIÓN DE LA RECTA

- 1) Se tiene una secuencia de figuras formada por palitos de fósforos. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de algunas figuras y la cantidad de palitos necesarios para formarlas:

N° de figura	4	7	10	15
Cantidad de palitos	13	19	25	35

- g) A partir de los datos de la tabla construya la gráfica correspondiente.
- h) ¿Qué representa cada punto de la gráfica?
- i) ¿Qué característica tiene esta gráfica?
- j) Si consideras dos figuras consecutivas cualesquiera, ¿cuántos palitos se necesitan para pasar de una figura a otra?
- k) ¿Cuántos fósforos se necesitan para formar la figura N° 49?
- l) Se sabe que con 147 palitos se puede formar una figura, sin que falten o sobren palitos, ¿a qué figura corresponde?
- m) Halla la ecuación que representa esta situación y escríbela en la formas $ax + by + c = 0$ e $y = mx + n$.
- n) Dibuja las tres primeras figuras de esta secuencia.



- 2) Consideremos el problema de arriendo de autos. Se sabe que el valor total del arriendo se cobra de acuerdo con los Kilómetros recorridos, más un cargo fijo. A la hoja de registro del arriendo para un cierto día de la semana le ha caído tinta, tal como muestra la figura:

- a) Construye el gráfico que representa esta situación.
- b) ¿Qué significado le atribuyes a cada punto de la gráfica?
- c) Describe la gráfica que obtuviste.
- d) ¿Cuál es el valor por hora de este arriendo?
- e) ¿Cuántas horas de arriendo pagó el cliente N° 4?
- f) ¿Cuánto dinero pagó el cliente N° 6?
- g) Para el cliente N° 5, determinar la cantidad de horas de arriendo y el valor total a pagar.
- h) Encuentra el modelo de esta situación y escríbelo en la formas $ax + by + c = 0$ e $y = mx + n$.

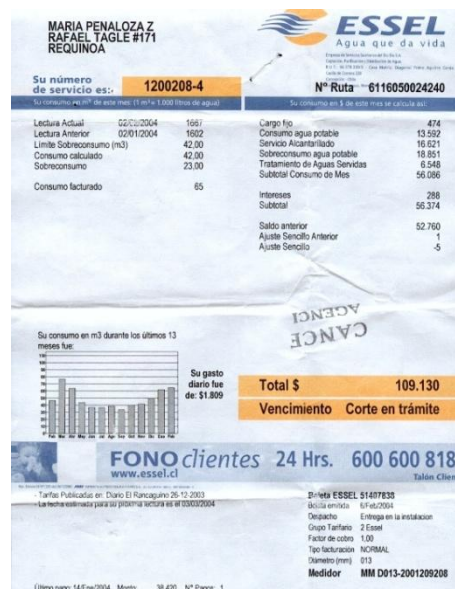
N° Cliente	Horas de arriendo	Valor a pagar
1	57	292.170
2	20	112.720
3	4	35.120
4		156.370
5		
	17	
7	41	214.570
8	25	136.970
9	7	49.670
10	36	190.320

- 3) Ahora trabajaremos con la cuenta de agua. Recuerda que para calcular el valor total de la boleta, al valor de los metros cúbicos consumidos, se agrega un cargo fijo (que se cobra exista o no consumo de agua). Para el desarrollo de este problema, no consideraremos otros cargos tales como: alcantarillado, servicio de aguas servidas, sobreconsumo, etc.

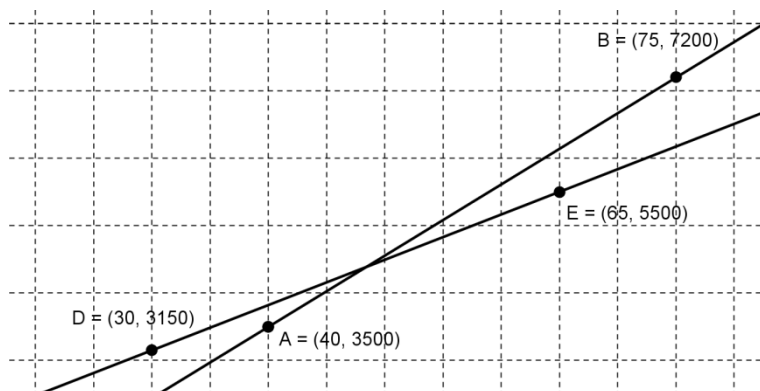
Se dispone de la información de dos clientes:

Cientes	Metros cúbicos m^3	Valor total a pagar \$
A	43	4.747
B	72	7.560

- ¿Cuál es el valor del metro cúbico de agua?
- Si un cliente consume $95 m^3$, ¿cuál es el valor de la cuenta de agua?
- Si un cliente cancela un total de \$3.971, ¿cuántos metros cúbico consumió?
- Determina la ecuación que modela el problema y escríbela en las formas general y principal.



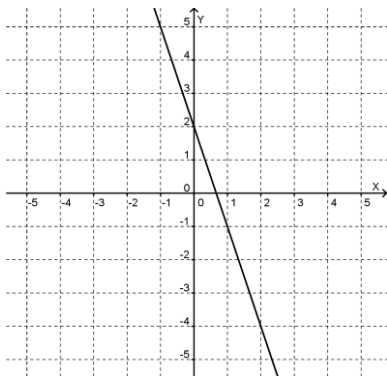
- 4) Las siguientes rectas representan las tarifas de dos empresas eléctricas:



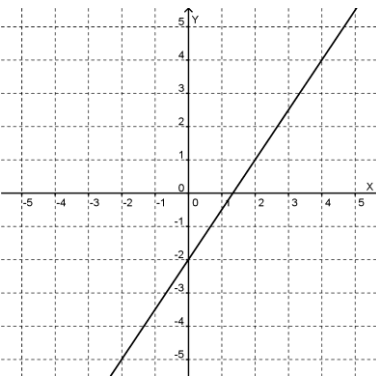
- Determine el valor del Kilowatt/hora que cobra cada una de ellas.
- ¿Cuál es la ecuación que modela el problema? Escríbala en la forma principal y general.

5) ¿Cuál es la ecuación de cada recta? Escríbala tanto en la forma general como principal.

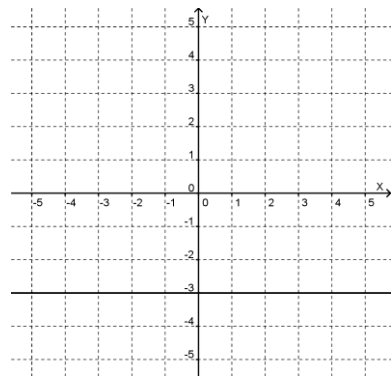
a)



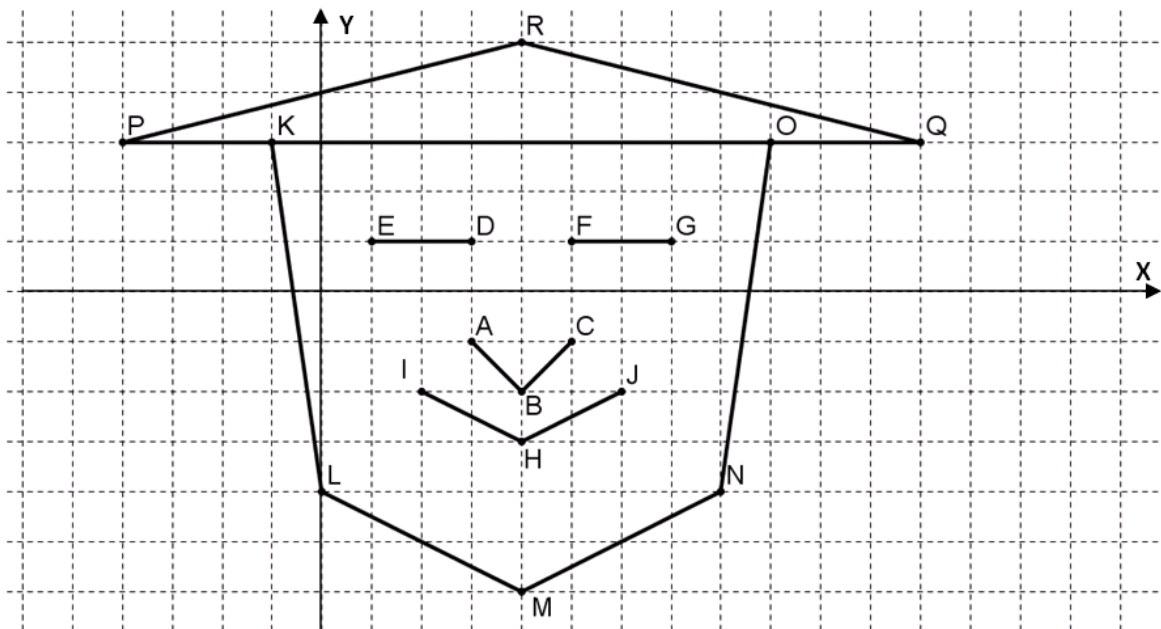
b)



c)



6) Encuentra las ecuaciones de las rectas portadoras de los segmentos que forman la cara del "chinito" (escríbelas en la forma principal y general):



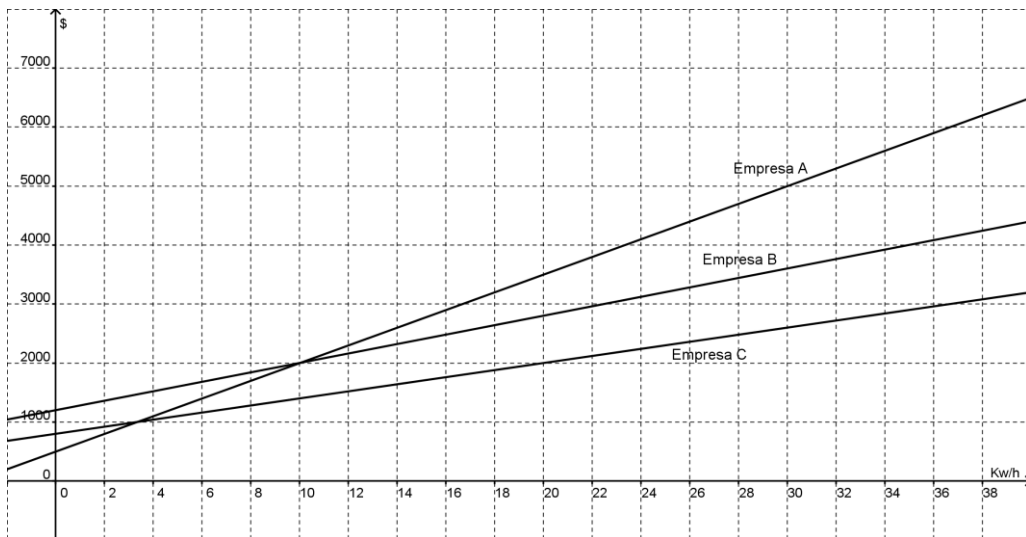
7) Una empresa de servicios sanitarios el valor del metro cúbico de agua vale \$157. Si un cliente paga en total \$10.417 por un consumo de 73 m^3 , encuentre la ecuación que modela este problema.

8) Un cliente cancela en total, por su cuenta de electricidad, \$11.385. Si el valor del Kwatt/hora es de \$87, encuentra el modelo matemático de esta situación.

9) En cada caso, a partir de la información dada, encuentra la ecuación de la recta:

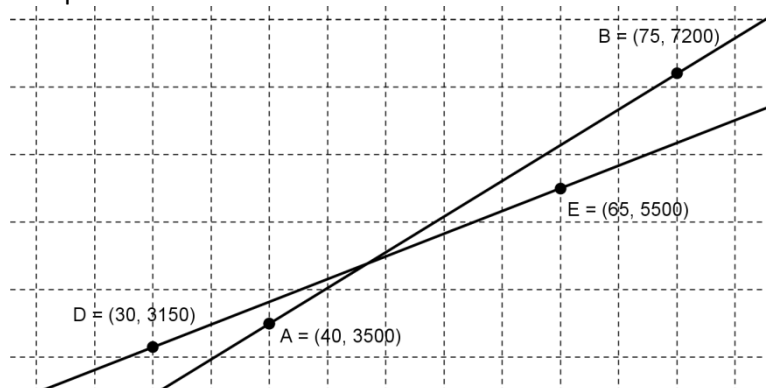
- Pasa por los puntos T(2,-6) y W(0,-2)
- Pasa por N(-5,-10) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.
- Es una recta horizontal y pasa por el punto S(0,-8).
- Pasa por el origen y el punto M(3,-7).
- Pasa por el punto del eje X de abscisa -10 y tiene pendiente $-\frac{2}{5}$
- Pasa por el punto del eje Y de ordenada -4 y tiene pendiente cero.
- Tiene pendiente $-\frac{3}{8}$ e intercepta al eje X el punto de abscisa -5.

10) En el siguiente gráfico están representadas las tarifas de tres empresas eléctricas:

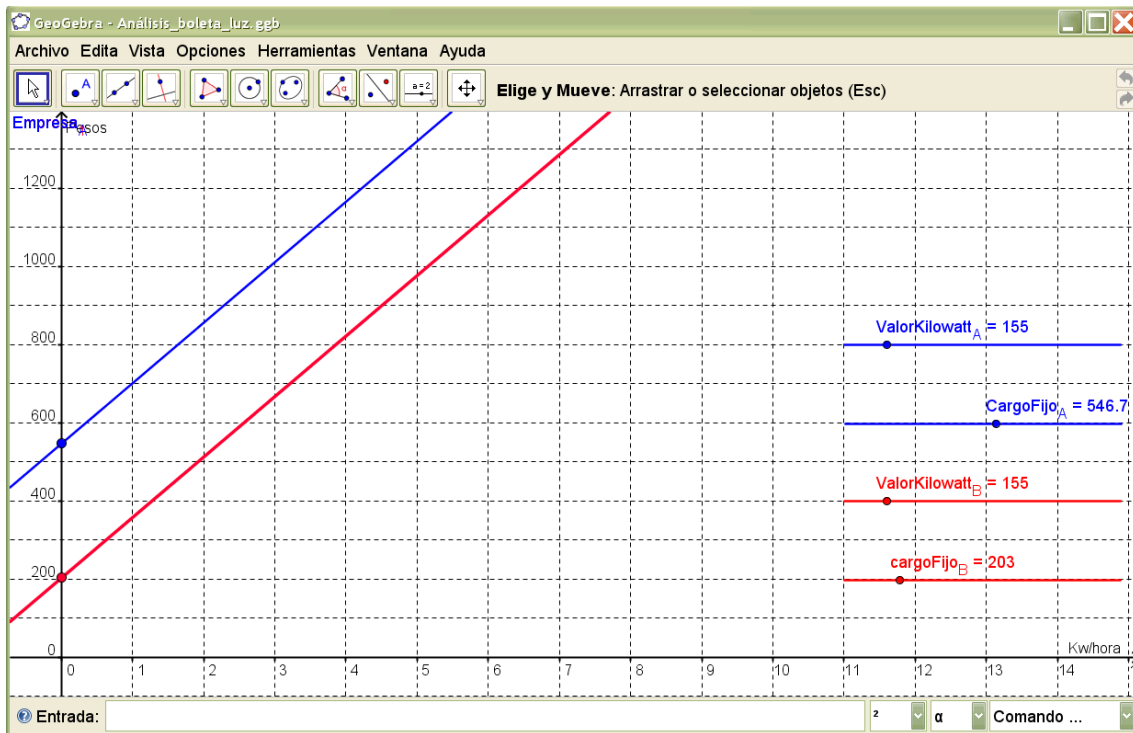


- Para cada empresa, encuentre los valores del cargo fijo y del Kilowatt/hora.
- ¿Cuál empresa es más económica?

11) Las siguientes rectas representan las tarifas de dos empresas eléctricas, determine el valor del Kilowatt/hora que cobra cada una de ellas.



Se adjuntan animaciones en Geogebra, que permite complementar los análisis del problema de la boleta de la luz:



Bibliografía

Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile. (2003). *Funciones y Sistemas de Ecuaciones*. Santiago: Zig-Zag S.A.

Mineduc (2008). Planes y Programas de Estudio. Unidad de Currículo y Evaluación
Documento en línea. <http://www.curriculum.mineduc.cl/>