

Configuraciones Geométricas

TRABAJO FINAL PASANTÍA “DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA” AÑO 2009

Profesores

Ethel Pavez Núñez

Luis Sánchez Jara

Rodrigo Jiménez Villarroel

Toulouse, Francia

Introducción

Las configuraciones geométricas forman parte fundamental de la enseñanza de la matemática y en particular del eje de estudio “Geometría”. Comienza desde temprana edad con el estudio de las figuras geométricas planas y el descubrimiento de sus propiedades. Por ejemplo, cuando se solicita realizar una construcción o se construye una figura a partir de otra, cuando se demuestran teoremas que involucran construcciones geométricas pertinentes se trata del estudio de “configuraciones geométricas”.

Existen algunas configuraciones geométricas que gozan de cierta importancia, dada la cantidad de aplicaciones que posee; por ejemplo, se tiene que *“en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa”* que se conoce como Teorema de Pitágoras. Es una configuración geométrica que se estudia desde la Enseñanza Básica y que continúa su estudio en aplicaciones de los más diversos contextos.

Luego, en segundo año medio se estudian los Teoremas de Thales, relacionados directamente con la Proporcionalidad (de las longitudes de ciertos trazos) e indirectamente con la Semejanza de Triángulos (demostraciones de ciertas propiedades), unidades de estudio de primer año medio y segundo respectivamente. Así también, está la unidad llamada “La circunferencia y sus ángulos”, donde se pueden descubrir y demostrar de manera sencilla muchas configuraciones geométricas, por ejemplo el Teorema de las cuerdas o de las tangentes. De esta manera se observa que una simple construcción geométrica puede permitir generar conocimiento geométrico y algebraico de gran nivel.

En tercero medio se continúa con la unidad “Más sobre triángulos rectángulos”, donde se retoma el estudio del Teorema de Pitágoras, principalmente sus demostraciones y generando tríos pitagóricos, por mencionar algunas actividades. Además se estudian las razones trigonométricas a partir de la necesidad de resolver diferentes situaciones problemáticas modelizadas en el triángulo rectángulo. Por último, y no menos importante, está el estudio de los Teoremas de Euclides, los cuales se tratarán más a fondo en este

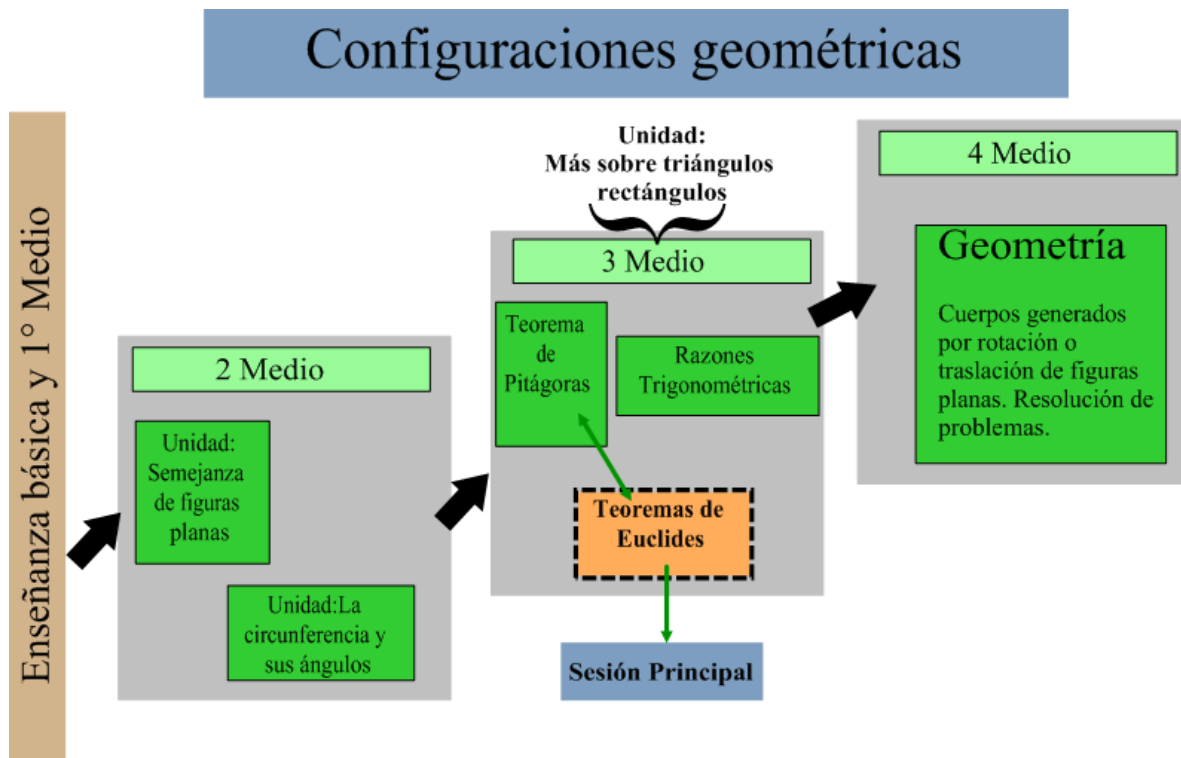
trabajo con la creación de sesiones de enseñanza y aprendizaje de este tema y que permiten resolver nuevos problemas y construir trazos con longitudes irracionales.

En cuarto medio se estudia la Geometría del espacio, específicamente los cuerpos generados por rotación o traslación de figuras en el espacio y los vectores.

Por último, la resolución de problemas gira en torno a las configuraciones geométricas por medio de situaciones de variados contextos: algebraicos-geométricos, mediciones de longitudes, demostraciones, entre otras.

Configuraciones Geométricas en la Enseñanza Básica y Media

El siguiente esquema muestra la secuencia de estudio de las configuraciones geométricas.



Esquema general que muestra el estudio, según los programas de educación matemática chilenos, de las configuraciones geométricas en la enseñanza. En esta ocasión, se centra la atención en los Teoremas de Euclides y su ubicación dentro de este contexto.

Secuencia

Nivel 3° Medio

Unidad

“Más sobre triángulos rectángulos”

Descripción

El desarrollo de esta unidad se propone mediante dos secuencias. La primera se refiere a los teoremas de Euclides y de Pitágoras en los que importan tanto las propiedades que se generalizan para todos los triángulos rectángulos, como el proceso de llegar a proponer una demostración. La configuración geométrica denominada Teorema de Pitágoras es una relación conocida desde la Educación Básica, estudiado para resolver situaciones problemáticas sencillas. En esta oportunidad se retoma desde un enfoque no considerado en la Educación Básica, principalmente desde sus demostraciones, algunas muy próximas a la intuición y otras más formales, pero todas con rigor y válidas en la matemática escolar. Con respecto a los Teoremas de Euclides, éstos son desconocidos para los estudiantes, por ello se estudian detalladamente en la sesión principal, donde se realiza una propuesta de enseñanza acorde a los objetivos propuestos en nuestros programas de estudio.

La segunda secuencia se refiere a las razones entre las longitudes de los lados, definidas en el triángulo rectángulo y sus aplicaciones a la resolución de problemas. Esta secuencia propone una primera aproximación a la trigonometría por medio de las razones trigonométricas.

Ambas secuencias invitan a utilizar las configuraciones geométricas presentes en el triángulo rectángulo en la resolución de problemas, principalmente geométricos y de mediciones de alturas y distancias.

A continuación, se propone el desarrollo de estas secuencias.

Contenidos

- Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.
- Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.
- Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentarios sobre el Teorema de Fermat.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

- Reconocen que las razones trigonométricas son cocientes invariantes entre las medidas de los lados, en familias de triángulos rectángulos semejantes.
- Conjeturan sobre propiedades geométricas en triángulos rectángulos semejantes, las demuestran utilizando diversos recursos argumentativos.
- Resuelven problemas que involucran propiedades de los triángulos rectángulos; analizan las soluciones que se obtienen y su pertinencia.
- Reconocen el sentido y la necesidad de la demostración en matemática y, en particular, conocen la historia del Teorema de Fermat-Wiles y los tríos pitagóricos.

Actividades:

- En triángulos rectángulos semejantes definen seno, coseno y tangente de sus ángulos agudos.
- Demuestran algunas igualdades trigonométricas básicas.
- Establecen medidas de lados y ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de funciones trigonométricas.
- Resuelven problemas sencillos, de diversos ámbitos, utilizando directamente las funciones trigonométricas.
- Demuestran los teoremas de Euclides. Aplican este teorema en la construcción de raíces cuadradas.
- Comparan diversas maneras de demostrar el Teorema de Pitágoras; generan tríos pitagóricos y conocen algunos antecedentes sobre la antigua conjetura de Fermat.

Esquema contenidos unidad “Más sobre triángulos rectángulos”



Esquema de la unidad que resume los aspectos más importantes, presenta ambas secuencias y la posición de la sesión principal.

Primera Secuencia

Teoremas de Pitágoras y Euclides

A continuación se describe la secuencia de sesiones para trabajar los teoremas en el triángulo rectángulo.

Sesión 1

Tema: Demostraciones del Teorema de Pitágoras

Objetivo: Demostrar el teorema de Pitágoras de diversas maneras y compararlas.

Tipo de trabajo: Las demostraciones del teorema de Pitágoras en su mayoría son geométricas y se basan en el uso de puzzles, en donde las piezas en que se han dividido los cuadrados construidos sobre los catetos, completan el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Es aconsejable que el profesor al comenzar la sesión relate aspectos históricos de la importancia de la demostración en matemática y responda al por qué se demuestra el Teorema de Pitágoras en este nivel.

También, es posible solicitar a los alumnos y alumnas que investiguen distintas demostraciones del Teorema en internet y las presenten en clase.

Sesión 2

Tema: Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Objetivo: Aplicar el teorema de Pitágoras en diversas situaciones problemáticas.

Tipo de trabajo: En esta sesión se trabajan diversos ejercicios usando el teorema de Pitágoras para encontrar lados de un triángulo.

Sesión 3

Tema: Semejanza de triángulos.

Objetivo: Encontrar la medida de lados de triángulos apoyándose en la semejanza de triángulos.

Tipo de trabajo:

En esta sesión se pretende hacer que el alumno recuerde la semejanza de triángulos y sus criterios, visto en segundo medio, para determinar la medida de lados de un triángulo, ya que en la sesión siguiente se aborda el teorema de Euclides usando este contenido como herramienta para determinar el lado de un triángulo y también en su demostración.

Sesión 4

Corresponde a la ubicación de la sesión principal desarrollada plenamente en este trabajo.

Sesión 5

Tema: Aplicaciones de los Teorema de Euclides

Objetivo: Resolver ejercicios de aplicación del Teorema de Euclides.

Tipo de trabajo: En esta sesión los alumnos desarrollan una guía de trabajo, la cual está presente en los anexos al final de este documento.

Sesión 6

Evaluación escrita que incluye teorema de Pitágoras y Euclides.

Segunda secuencia

Razones trigonométricas

En esta etapa se entrega una posibilidad de secuencia de sesiones para desarrollar el tema de razones trigonométricas en tercero medio, terminando con una evaluación escrita que incluye los contenidos tratados en esta parte de la unidad.

Sesión 1

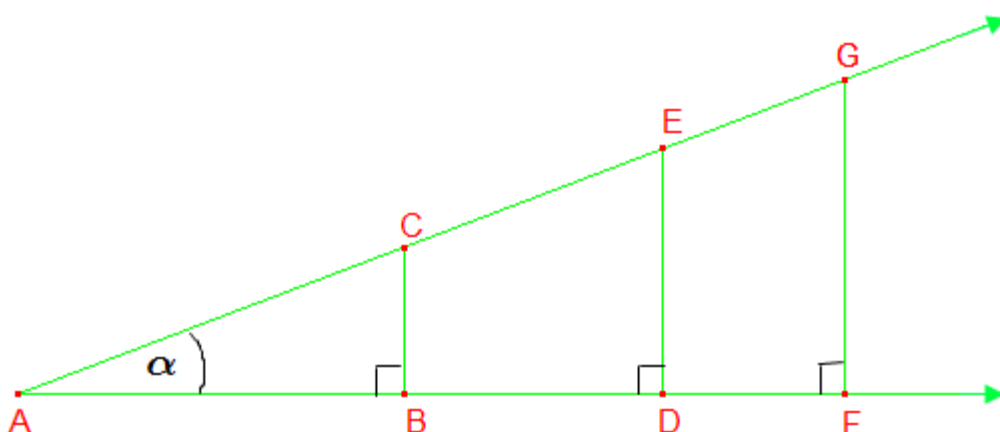
Tema: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Objetivo: Reconocer las razones trigonométricas como cuocientes invariantes entre las medidas de los lados de familia de triángulos rectángulos semejantes.

Tipo de trabajo:

Al inicio de la sesión se lee un documento de cómo se calculó la altura del monte Everest, para dar a conocer la necesidad de tener una herramienta matemática que permita medir alturas inaccesibles. Este documento se puede observar en la sección Anexos.

Se entrega la siguiente imagen a los alumnos



A partir de esta imagen, se pide a los alumnos que midan lados de los triángulos que se forman en la figura y luego formen razones entre estos para concluir que las razones entre los lados son invariantes, luego se definen estas razones como seno, coseno y tangente del ángulo α .

Luego el alumno resuelve ejercicios donde se dan las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo y mediante el teorema de Pitágoras encuentran la medida del tercer lado, posteriormente calculan las razones trigonométricas de cada uno de los ángulos agudos, con el fin de trabajar las definiciones anteriores.

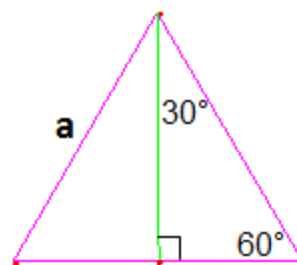
Sesión 2

Tema: Razones trigonométricas de ángulos especiales

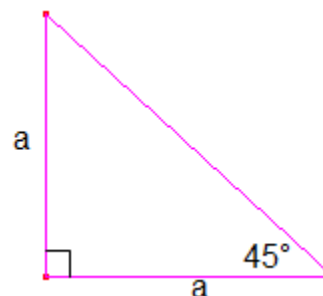
Objetivo: Calcular las razones trigonométricas para ángulos de 30° , 60° y 45°

Tipo de Trabajo.

Los alumnos calculan las razones trigonométricas para 30° y 60° usando un triángulo equilátero de lado a considerando una de sus alturas. Se indica que dejen estos valores expresados como fracción.



Los alumnos calculan las razones trigonométricas para 45° usando un triángulo rectángulo isósceles de catetos a . Se indica que dejen estos expresados en fracción.



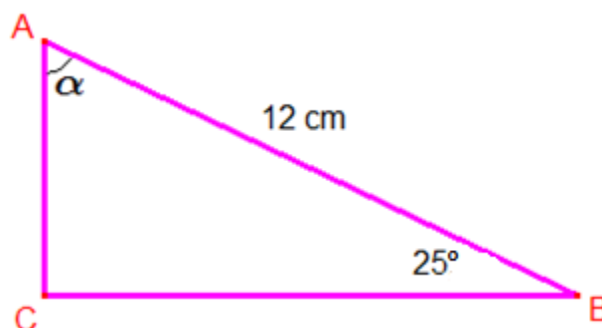
Luego deben registrar estos valores en una tabla con el objetivo de tenerlos cuando los necesiten.

Ángulo \ Razón	30°	45°	60°
Seno			
Coseno			
Tangente			

Se enseña a usar la calculadora como herramienta para encontrar el valor de una razón trigonométrica de un ángulo agudo, o la opción inversa de ésta que permite determinar el valor de un ángulo.

Posteriormente resuelven ejercicios de resolución de triángulos rectángulos, es decir dadas las medidas de algunos de sus lados y/o ángulos deben encontrar las medidas de los lados o ángulos restantes. Véase el siguiente ejemplo:

Dado un triángulo ABC rectángulo en C. Calcular el valor de AC, BC y α .



Sesión 3

Tema: Problemas de aplicación

Objetivo: Resolver problemas de alturas o distancias inaccesibles.

Tipo de trabajo:

Los alumnos resuelven diversos problemas aplicando las razones trigonométricas, para esto se apoyan en el uso de la calculadora científica.

Se encuentra una guía de trabajo sugerida para esta sesión en la sección ANEXOS.

Sesión 4

Tema: Evaluación escrita

Sesión Principal

Deducción de los Teoremas de Euclides

Deducción de los teoremas de Euclides

Descripción de la sesión:

La sesión que se describe a continuación pertenece a la unidad “Más sobre triángulos rectángulos” del nivel 3° medio y corresponde a la sesión 4 de la secuencia correspondiente a triángulos rectángulos. Se refiere al estudio de los Teoremas de Euclides. De manera particular, se utiliza una situación problemática que requiere para su resolución la aplicación de uno de los teoremas Euclides, específicamente el que relaciona la altura del vértice del ángulo recto con las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. En simbología convencional corresponde a la igualdad $h^2 = pq$.

Luego se realiza una descripción de la sesión a partir de la teoría antropológica de la enseñanza, descrita a través de su praxeología particular destinándose un espacio a la organización matemática y otro a la organización didáctica.

En la organización didáctica se detallan los momentos presentes en la sesión, que se acompaña de una demostración de los Teoremas íntimamente relacionada con la resolución del problema de la clase (aquella que se sustenta en la semejanza de los triángulos rectángulos que se formen). Aunque con ello no se sugiere descartar el desarrollo de otras demostraciones, ya que en los Anexos se sugiere otra manera de demostrar los teoremas de Euclides utilizando la igualdad de áreas, aunque existe otra sustentada en el Teorema de Pitágoras.

Para favorecer una mayor comprensión de la sesión a fin de lograr efectuarla en el aula con mayor probabilidad de éxito, se detalla la estructura lógica de la clase acompañada de orientaciones pedagógicas ante diferentes situaciones de aula que eventualmente podrían generarse con los alumnos.

❖ **Título del Tema:**

Esta sesión se inserta dentro del tema general “**Configuraciones Geométricas**”.

❖ **Contenido Matemático**

De acuerdo al programa de estudio de 3° medio, el contenido asociado a la sesión corresponde a:

“Demostración del teorema de Euclides relativo a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo”.

❖ **Objetivo Fundamental**

A partir de los objetivos fundamentales propuestos en los planes y programas de estudio el objetivo involucrado es:

“Conjeturar sobre propiedades geométricas en triángulos semejantes, las demuestran utilizando diversos recursos argumentativos”.

De esta manera el **objetivo de la sesión** es:

“Deducir los teoremas de Euclides a partir de su aplicación en la resolución de una situación problemática”.

❖ **Ubicación de la sesión en la secuencia:**

Esta sesión corresponde al primer encuentro con los teoremas de Euclides.

❖ **Conocimientos previos**

- Teorema sobre el ángulo inscrito en una semicircunferencia
- Criterios de semejanza de triángulos
- Proporcionalidad
- Teorema de Pitágoras

❖ **Dificultades y obstáculos de la sesión**

Se considera importante mencionar, previo a la descripción de la sesión, las posibles dificultades y obstáculos que podrían generarse en el aula de clases. La finalidad de este apartado es entregar un apoyo mayor al docente que desee ejecutar esta sesión. Las principales dificultades podrían ser:

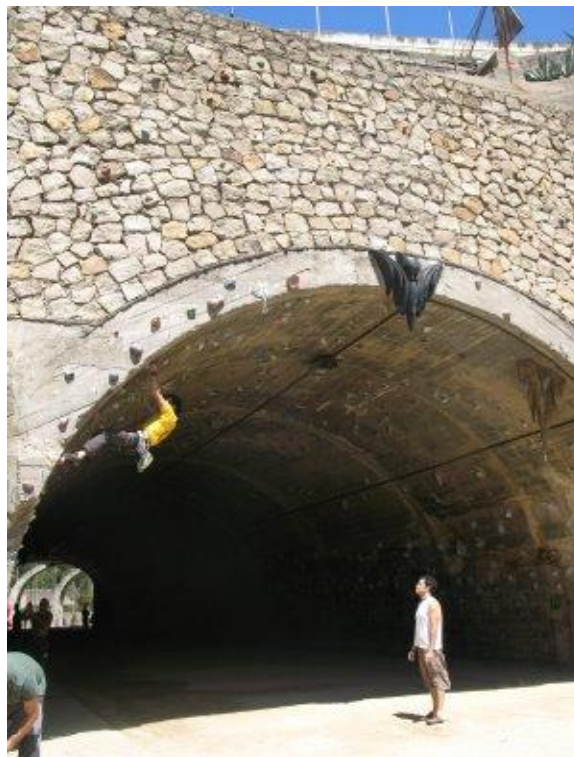
- a. Aquellas relacionadas con la semejanza de triángulos, referidas a las dificultades que podrían generarse en el reconocimiento de los triángulos rectángulos semejantes que se forman y, por consecuencia, en el de los lados homólogos de los triángulos. Esto podría llevar a errores en el planteamiento de las proporciones entre los lados homólogos, precisamente la proporción que resuelve la situación problemática (y que corresponde a uno de los Teoremas de Euclides). Por ello, se incluye una sesión previa que centra la atención en la utilidad de la semejanza de triángulos, criterio para evaluar la semejanza de triángulos rectángulos, la resolución de problemas y el desarrollo de esquemas geométricos representativos de situaciones.

- b. Aquellas relacionadas con el proceso de demostración, lo que dependerá del acercamiento que los alumnos y alumnas tengan de este proceso. Sin embargo, en este caso particular, la demostración es similar al proceso de deducción del Teorema de Euclides, basta formalizarlo con la notación matemática pertinente.

Primer encuentro de los alumnos y alumnas con los Teoremas de Euclides

Situación problemática:

“Una persona se ubica exactamente en la salida de un túnel con forma de semicircunferencia. Mide las distancias desde donde se ubica a los extremos del túnel y descubre que son 4 y 9 metros. Se pregunta ¿qué altura tendrá el túnel exactamente en el punto donde se encuentra?”



Se ha elegido esta situación porque permite a los(as) alumnos(as) visualizar la utilización de la matemática en situaciones de la vida diaria. A su vez, desarrolla habilidades de abstracción, dado que el estudiante necesita representar la situación por medio de un esquema geométrico y, por último, durante el proceso de resolución el (la) alumno(a) descubre, deduce, conjetura y aprende nuevas herramientas matemáticas para luego demostrarlas.

En relación al objetivo de aprendizaje planteado, esta actividad se considera pertinente ya que permite deducir uno de los Teoremas de Euclides. Su proceso de resolución inevitablemente lleva al alumno y alumna a encontrar la relación que plantea el Teorema de Euclides bajo una perspectiva deductiva.

Organización matemática de la sesión

Praxeología (T, τ , Θ , Θ)

Tipo de tareas (T): Calcular la medida de una longitud.

Tarea(t_1): Calcular la longitud de la altura de un triángulo rectángulo correspondiente al ángulo recto a partir de una situación problemática.

Técnica (τ): Aplicar el Teorema de Euclides que se refiere a la altura en el triángulo ΔACB .

En primer lugar, a partir de la configuración geométrica que representa la situación problemática, se tiene que $\Delta ACB \sim \Delta AHC \sim \Delta CHB$ son triángulos rectángulos semejantes. A partir de ello se plantea la proporción que relaciona la altura del triángulo rectángulo con las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Reemplazan en la proporción encontrada las medidas dadas en la situación y determinan la altura buscada.

Tecnología (Θ): La validación de la técnica empleada para resolver la situación problemática se desarrolla de dos maneras:

- 1- Justificación experimental utilizando el software CABRI II o Geogebra, para ello se construye el esquema de la situación problemática en clase, se miden los trazos formados y se muestra que se cumple la igualdad $h^2 = pq$ al desplazar el vértice H a lo largo del diámetro de la semicircunferencia, admitiendo la veracidad de la técnica aplicada.
- 2- Demostración de la propiedad en el triángulo rectángulo que corresponde a los Teoremas de Euclides, particularmente aquella que relaciona la altura del vértice del ángulo recto con las proyecciones sobre los catetos.

Teoría (Θ): Semejanzas de triángulos (en este caso, triángulos rectángulos). Teorema de Euclides.

Organización didáctica de la sesión

Momento del primer encuentro

Comienza la sesión con el saludo a la clase. A continuación es importante motivar a los alumnos y alumnas contándoles cuál es la finalidad de la matemática, como ciencia que intenta dar solución a problemas de la vida cotidiana que muchas veces no se pueden resolver con instrumentos tangibles (longitudes inaccesibles, por ejemplo) y que está en constante evolución debido a la necesidad del hombre de dar respuesta a nuevas inquietudes.

Luego se presenta la nueva situación problemática, la que se realiza por medio de la entrega de una guía de trabajo a cada estudiante.

Momento exploratorio

La manera que se propone estudiar esta situación problemática en el aula es la siguiente: El docente solicita leer individualmente la situación, luego esquematizarla e intentar una solución al problema planteado. Para ello cada estudiante podrá discutir y conjeturar resultados con su compañero más cercano (se sugiere trabajar en parejas en este proceso durante 5 minutos). No olvidar que en este momento es importante que el alumno visualice que se forma un ángulo recto en el vértice ubicado en la semicircunferencia, dar indicios de su existencia a fin de elaborar un esquema propicio para la resolución del problema. Para ello se sugiere orientar a los estudiantes (entregar “comodines”) con el fin de extraer toda la información posible del esquema (medidas de ángulos, de longitudes).

Durante el tiempo de exploración del problema, el docente podría encontrarse con diferentes situaciones de aula que enriquecen el aprendizaje, ellas son:

- a)** Algunos alumnos diseñen un esquema a escala de la situación (transformar metros a centímetros por ejemplo) y midan las longitudes, entregando la solución al problema.

En este caso, se puede comentar que no siempre es posible medir las longitudes; preguntar ¿qué sucede cuando las medidas son muy grandes? En esos casos ¿se podría realizar un esquema a escala?

Con las respuestas, es sencillo concluir que es necesario encontrar un método de solución independiente de las medidas dadas.

b) Que formen triángulos rectángulos e intenten aplicar el Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es una herramienta matemática que los estudiantes dominan ya que sus demostraciones y aplicaciones se estudian previamente a esta sesión; entonces, es lógico suponer que intentarán aplicarlo para resolver el problema. Sin embargo, notarán que no es suficiente para encontrar la altura buscada, ya que sólo se conoce la medida de un lado en cada triángulo rectángulo. Si se da este caso, puede ser importante que el docente destaque que se necesita un método que relacione todos los datos del esquema y que permita calcular una longitud. Lo que seguramente llevará a plantear la utilización de la semejanza de triángulos.

c) Que formen triángulos rectángulos y visualicen que existe semejanza entre ellos.

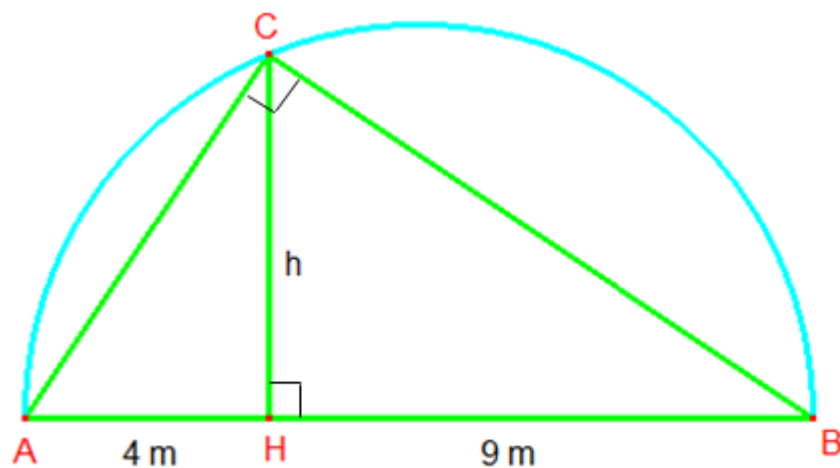
Esta posibilidad podría llevar al alumno a encontrar la solución al problema planteado, primero descubre la semejanza (al observar que todos los triángulos son rectángulos) y luego plantea la proporción que relaciona la altura con las distancias dadas. Esto lleva al docente a solicitar la ejecución de este método a los otros estudiantes y luego formalizarlo denominándolo Teorema de Euclides. Luego la clase desarrollaría la etapa de validación del método tal como se sugiere más adelante.

d) Que formen los triángulos rectángulos y visualicen la semejanza existente, pero existan dificultades al plantear la proporción adecuada.

Es un hecho que los alumnos y alumnas verán una probable semejanza de los triángulos rectángulos formados ya que estarán familiarizados con este tema¹. De esta manera, continúa la clase:

¹ Además, de la sesión anterior, recordarán que una de las utilidades fundamentales de la semejanza de triángulos es el cálculo de las medidas de longitudes inaccesibles.

El docente solicita a un alumno o alumna construir el esquema de la situación en la pizarra. En este momento, es importante nombrar los distintos vértices de la figura para permitir plantear las proporciones existentes entre los lados de los triángulos. La siguiente imagen muestra el esquema propicio.



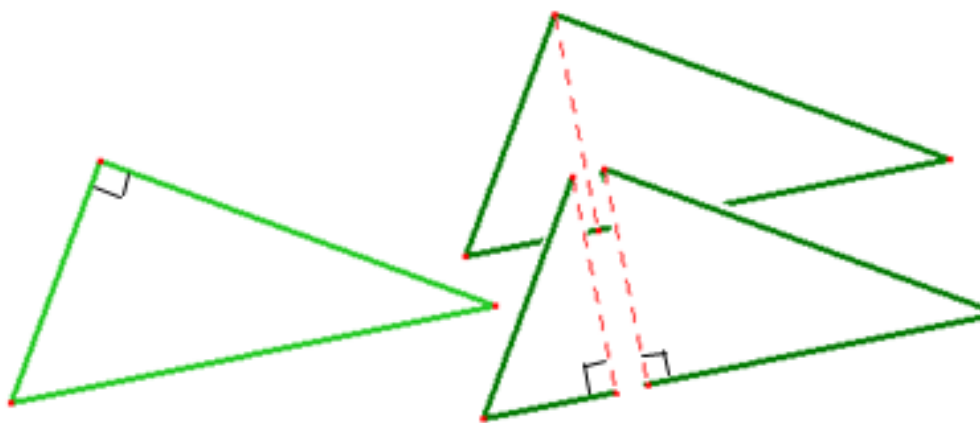
- 1- Se solicita mostrar la semejanza de los triángulos ACB, CHB y AHC, por medio del método que estimen conveniente¹. Se entrega un tiempo prudente para ello.

¹Se invita a los alumnos a utilizar el método que deseen, ya que dependerá del manejo que posean del tema. Algunos reconocerán ángulos de igual medida, otros recortarán y superpondrán triángulos observando los ángulos iguales.

Actividad Sugerida

Si existen dificultades para observar la semejanza de los triángulos y los correspondientes lados homólogos, se sugiere realizar la siguiente actividad:

- i- Cada estudiante recibe dos triángulos rectángulos congruentes y asignan los nombres a los vértices en cada triángulo, en uno de ellos trazan la altura correspondiente al vértice del ángulo recto y realizan el corte por esta, obteniendo dos triángulos. Véase la siguiente imagen:



- ii- Manipulan los triángulos, los superponen y encuentran los lados homólogos de manera sencilla, planteando la proporción que da solución al problema y lo resuelven.

Si no existieran dificultades para hallar los lados homólogos y plantear las proporciones existentes, se solicita centrar la atención en aquella que relaciona las medidas dadas con la altura buscada. Siguiendo el siguiente formato:

Se tiene que $\Delta AHC \sim \Delta CHB$, por lo tanto:

$$\frac{AH}{HC} = \frac{CH}{HB}.$$

Reemplazando los valores de AH y HB, se obtiene:

$$\frac{4}{HC} = \frac{HC}{9} \Rightarrow HC^2 = 36 \Rightarrow HC = 6m$$

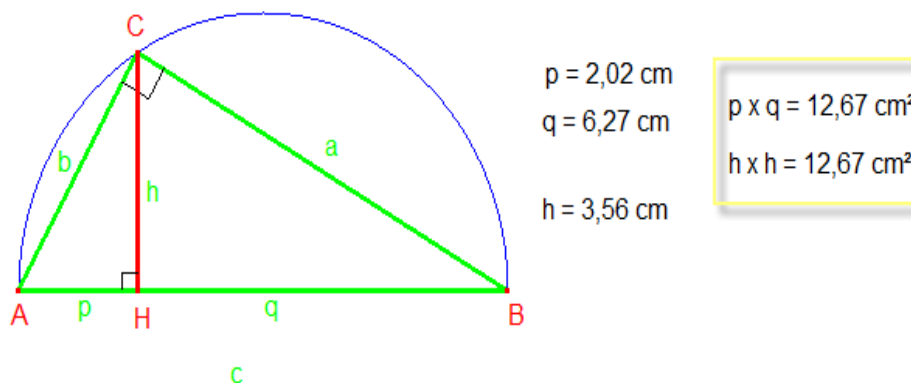
De esta manera, se concluye que la altura en el punto donde se ubica la persona es de 6 m, obteniendo la respuesta al problema.

Momento Tecnológico – Teórico

En este mismo momento se continúa con la etapa de **demonstración de la técnica o método utilizado:**

La técnica que resuelve la situación anterior es un nuevo método que permitirá calcular medidas y es necesario validarla. Para ello se realiza dos procesos que se admiten pertinentes para validar la técnica utilizada.

- Primero, a través de la utilización del software matemático de geometría dinámica CABRI II. En este programa, el docente presenta la configuración geométrica acorde con la situación problemática y con los nombres de los trazos. La imagen muestra el proceso:



Luego, desliza el vértice H por sobre el diámetro de la semicircunferencia, centrando la atención en las medidas presentes. La clase observa que los valores de pq y h^2 siempre son iguales, independiente de la posición de H. La clase concluye y valida la técnica.

Se considera que la visualización de los Teoremas de Euclides (en este caso se muestra el teorema utilizado en el problema, pero análogamente puede presentarse para los otros dos teoremas), cuando el vértice H se mueve es un buen recurso para admitir ciertos descubrimientos y complementar la demostración formal. Además, esta animación permite a los estudiantes notar que independientemente del lugar que adopte la persona a la salida del túnel, siempre es posible calcular la altura, por lo tanto, la técnica utilizada siempre es válida.

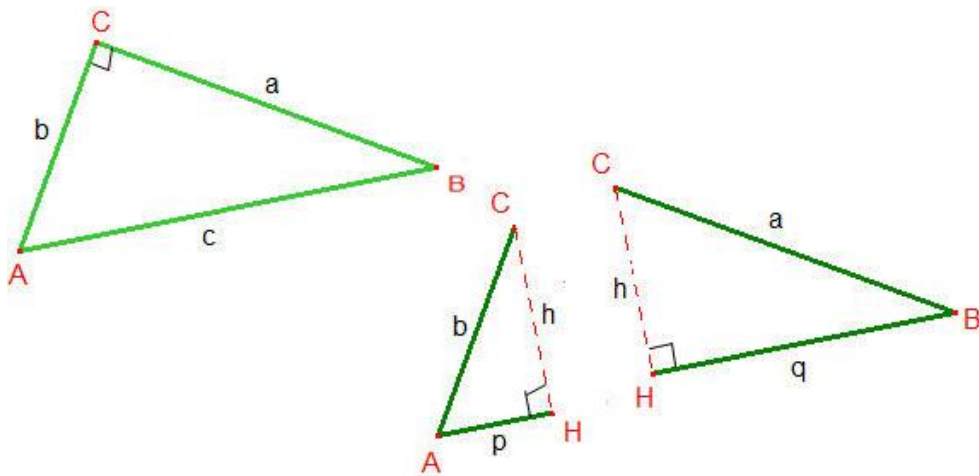
- Segundo, por medio de su demostración. Los programas de estudio, señalan en esta unidad la importancia de la demostración¹. Además, en esta ocasión, este proceso no causará mayores inconvenientes ya que es similar al proceso de resolución de la situación problemática inicial.

¹ En segundo año medio, en la unidad “Circunferencia y sus ángulos” cobra mucha importancia la demostración de las propiedades que ocurren en la circunferencia. Así también, en la unidad en la que se inserta esta sesión, la demostración de los teoremas es fundamental, proponiéndose realizar con los alumnos y alumnas varias demostraciones del Teorema de Pitágoras.

El profesor muestra la animación en CABRI y pregunta: ¿cuáles son los triángulos semejantes que se han formado y por qué lo son? Las respuestas deben ser $\Delta ACB \sim \Delta AHC \sim \Delta CHB$ porque todos son rectángulos con los ángulos iguales.

Entonces, plantear todas las proporciones presentes entre los lados homólogos de los tres triángulos. Asignar 10 minutos para ello.

Probablemente los estudiantes hagan uso de distintas estrategias para reconocer los lados homólogos y plantear las proporciones. Algunos alumnos y alumnas no tendrán dificultades en plantearlas, pero para aquellos y aquellas estudiantes que tuviesen dificultades, una buena estrategia sería separar los triángulos con sus respectivos nombres, la imagen señala esta etapa:



De esta manera, es sencillo reconocer los lados y plantear las proporciones en sus cuadernos. Los alumnos y alumnas escriben lo que se muestra a continuación:

Semejanza 1

Se tiene que $\Delta AHC \sim \Delta CHB$

$$\text{Por lo tanto } \frac{AH}{HC} = \frac{CH}{HB}, \quad \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CB} \text{ y } \frac{CA}{CH} = \frac{BC}{BH}$$

Lo que se escribe como $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$, $\frac{p}{b} = \frac{h}{a}$ y $\frac{b}{h} = \frac{a}{q}$ respectivamente.

Semejanza 2

Se tiene que $\triangle ACB \sim \triangle AHC$

$$\text{Por lo tanto } \frac{AC}{CB} = \frac{AH}{HC}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} \text{ y } \frac{CB}{BA} = \frac{HC}{CA}$$

Lo que se escribe como $\frac{b}{a} = \frac{p}{h}$, $\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$ y $\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$ respectivamente.

Semejanza 3

Se tiene que $\triangle ACB \sim \triangle CHB$

$$\text{Por lo tanto } \frac{AC}{CB} = \frac{CH}{HB}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{CB} \text{ y } \frac{CB}{BA} = \frac{HB}{BC}$$

Lo que se escribe como $\frac{b}{a} = \frac{h}{q}$, $\frac{b}{c} = \frac{h}{a}$ y $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$ respectivamente.

Se entrega un tiempo prudente para socializar y escribir las proporciones en los cuadernos, luego se solicita a un alumno o alumna escribirlas en la pizarra¹. Asignar máximo 5 minutos para este proceso.

Luego intencionalmente se centra la atención en las proporciones correspondientes a los Teoremas de Euclides y se solicita escribirlas como igualdades. El resultado es el siguiente:

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q} \Rightarrow h^2 = pq \qquad \frac{b}{c} = \frac{p}{b} \Rightarrow b^2 = cp \qquad \frac{a}{c} = \frac{q}{a} \Rightarrow a^2 = cq$$

De esta manera, la clase continúa con el siguiente momento de estudio: Institucionalización.

¹ Para favorecer el orden se sugiere escribir las proporciones existentes entre dos triángulos, seleccionar la que corresponde al teorema estudiado y luego repetir este proceso con los otros pares de triángulos.

Momento de Institucionalización

Después de haber estudiado con los alumnos y alumnas la situación problemática y realizar el proceso de demostración de la técnica utilizada, ha llegado el momento de la institucionalización, es entonces donde se recomienda al docente, construir con sus alumnos la redacción de las proporciones seleccionadas, las cuales son:

La primera proporción corresponde a:

Teorema de Euclides (de la altura) que dice: En un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la altura correspondiente al vértice del ángulo recto es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q} \Rightarrow h^2 = pq$$

La segunda y tercera proporción:

Teorema de Euclides (de los catetos) que dice: El cuadrado del cateto es igual al producto de la hipotenusa con la proyección de éste sobre ella. Análogamente para el otro cateto:

$$\frac{b}{c} = \frac{p}{b} \Rightarrow b^2 = cp$$

$$\frac{a}{c} = \frac{q}{a} \Rightarrow a^2 = cq$$

Finalmente se comenta que la próxima clase se estudiarán las aplicaciones de estos teoremas por medio de una guía de trabajo.

Fin de la sesión

**DESCRIPCIÓN DE
UNIDADES RELACIONADAS
CON CONFIGURACIONES GEOMÉTRICAS**

SÉPTIMO

Unidad: POTENCIAS EN LA GEOMETRÍA Y EN LOS NÚMEROS

Contenido: Investigan sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras.

Aprendizaje esperado: Los alumnos y alumnas utilizan de manera pertinente el Teorema de Pitágoras para la resolución de problemas cotidianos, del ámbito de otras disciplinas y de oficios.

Actividades:

- Trabajan con materiales concretos (del tipo rompecabezas), descomponiendo y componiendo polígonos regulares sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo; analizan relaciones entre sus áreas.
- Desarrollan y analizan procedimientos numéricos para verificar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los catetos es equivalente a la del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera.
- Utilizan el Teorema de Pitágoras para la resolución de problemas de cálculo de distancias.
- Investigan sobre aplicaciones del Teorema de Pitágoras en situaciones cotidianas como, por ejemplo, la verificación de ángulos rectos. Establecen conclusiones respecto de los números pitagóricos.

Comentario:

En esta etapa de la enseñanza fundamentalmente se trata de que comprendan las relaciones particulares que se dan entre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera y las utilicen en la resolución de situaciones de cálculo de distancias no susceptibles de ser medidas directamente.

En este sentido, se invita a alumnas y alumnos a realizar indagaciones sobre el uso del Teorema de Pitágoras, muchas veces intuitivamente o sin que se haya estudiado formalmente, en la vida cotidiana y de trabajo de personas adultas. Por ejemplo, los

carpinteros y albañiles, quienes lo utilizan con mucha propiedad para dibujar ángulos rectos.

El trabajo se centra en la aplicación del teorema de Pitágoras para resolver problemas de cálculo y no en su demostración, situación que se realiza posteriormente cuando se retoma este contenido en tercero medio.

SEGUNDO MEDIO

Unidad: SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS

Contenido:

- Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos.
- Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada.
- Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.
- Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.
- Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos.
- Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

Aprendizajes Esperados:

Los alumnos y alumnas:

- Conocen los criterios de semejanza de triángulos y los aplican en el análisis de diferentes polígonos y en la resolución de problemas.
- Reconocen y describen las invariantes que se establecen al ampliar o reducir figuras.
- Conocen el Teorema de Thales sobre proporcionalidad de trazos y lo aplican en la resolución de problemas.
- Conjeturan y demuestran propiedades geométricas asociadas a la proporcionalidad de trazos y a la semejanza de figuras planas, distinguiendo entre hipótesis y tesis.
- Conocen acerca de la mutua influencia entre la geometría y algunas expresiones artísticas.
- Estiman distancias y longitudes aplicando semejanza de triángulos.

Actividades

- Realizan ampliaciones y reducciones de figuras; utilizan el dibujo a escala e interpretan mapas, planos, dibujos, fotografías u otras formas de representación que utilice el dibujo a escala.
- Construyen figuras semejantes, comparan las medidas de los ángulos y de las longitudes de los lados; construyen tablas y gráficos; establecen las invariantes asociadas a la semejanza de figuras planas.
- Resuelven problemas y elaboran demostraciones utilizando el Teorema de Thales; conocen y analizan una demostración de este teorema.
- Estiman distancias o alturas aplicando la semejanza de triángulos; describen las relaciones que justifican la validez de sus estimaciones.
- Sistematizan los teoremas de semejanza para cualquier triángulo y deducen las formas que estos teoremas toman para los triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos. Aplican estos teoremas a la resolución de problemas.
- Analizan figuras semejantes y establecen las razones entre las áreas correspondientes.
- Recogen información sobre la división áurea, el número de oro, su presencia en la escuela pitagórica, en diversas expresiones artísticas y en la naturaleza.

Comentarios:

Se sugiere mostrar al alumno y alumna ejemplos de la vida cotidiana donde estén presentes las figuras semejantes.

Es importante también el recordar los criterios de congruencia de triángulos, ya que es un tema necesario para el concepto de semejanza.

Hay que dejar en claro que el orden de los vértices homólogos es de suma importancia, ya que ello simplifica la deducción de la proporcionalidad entre los lados.

Esta unidad tiene estrecha relación con la unidad de 3° medio ya que en el estudio del Teorema de Euclides se utiliza la semejanza de triángulos para deducirlo y también en una de sus formas de demostración.

SEGUNDO MEDIO

Unidad: SOBRE LA CIRCUNFERENCIA Y SUS ÁNGULOS

Contenidos:

- Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito.
- Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.
- Uso de algún programa computacional geométrico que permita en especial visualizar regularidades y medir ángulos.

Aprendizaje Esperado:

Los alumnos y alumnas:

- Conocen el teorema que relaciona las medidas de los ángulos del centro y de los ángulos inscritos en una circunferencia y lo aplican a la resolución de problemas.
- Conjeturan acerca de regularidades geométricas asociadas a la circunferencia, sus elementos (radio, tangente, cuerda, secante) y otras figuras geométricas; buscan formas para demostrarlas distinguiendo entre hipótesis y tesis.
- Analizan propiedades y relaciones en figuras geométricas que se pueden inscribir o circunscribir a una circunferencia.
- Describen cuerpos utilizando curvas de nivel.

Actividades

- Imaginan o realizan diversos cortes en cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) estableciendo las condiciones para que estos cortes generen círculos; caracterizan la circunferencia.
- Construyen e interpretan curvas de nivel como representación plana de algunos cuerpos.

- Demuestran el teorema relativo a los ángulos inscritos y el ángulo del centro que tienen el mismo arco y lo aplican al cálculo de medidas de ángulos o a la elaboración de demostraciones.
- Analizan y establecen las condiciones para que un cuadrilátero se pueda inscribir en una circunferencia.
- Analizan y establecen las condiciones para que se pueda inscribir una circunferencia en un cuadrilátero. Relacionan esta propiedad con el teorema sobre la medida de las tangentes desde un punto a una circunferencia.
- Demuestran el teorema relativo a la potencia de un punto si éste está en el interior de una circunferencia. Lo aplican en la resolución de problemas.
- Demuestran el teorema relativo a la potencia de un punto si éste está en el exterior de una circunferencia. Lo aplican en la resolución de problemas.

Comentarios:

Es importante que los alumnos logren diferenciar claramente entre ángulo del centro y ángulo inscrito, para ello pueden desarrollar una lista de ejercicios sencillos donde se distinga entre estos ángulos y se identifique correctamente cuál es el doble del otro.

Se recomienda la utilización de algún programa computacional geométrico que permita ver los cambios en las figuras, ya que ello facilita la intuición y aporta a la elaboración de cadenas del razonamiento para una demostración. (Geogebra, Cabri. etc.)

La relación de esta unidad con la de tercero medio radica en la propiedad de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, lo que permite la construcción e identificación de triángulos rectángulos y su posterior estudio.

CUARTO MEDIO

Unidad: GEOMETRÍA

Contenidos

- Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotaciones o traslaciones sucesivas de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.
- Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Ángulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

Aprendizajes Esperados:

Los alumnos y alumnas:

- Conocen y utilizan la operatoria básica con vectores en el plano y en el espacio (adición, sustracción y ponderación por un escalar), y la relacionan con traslaciones y homotecias de figuras geométricas.
- Conocen y valoran la capacidad del modelo vectorial para representar fenómenos físicos como desplazamientos y fuerzas.
- Resuelven problemas relativos al cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotaciones o traslaciones sucesivas de figuras planas.

Actividades:

- Representar vectores en el plano cartesiano, calcular gráfica y algebraicamente sumas y diferencias de vectores; determinar el producto de un escalar por un vector.
- Generalizan la noción de vector y la de operatoria vectorial desde el plano al espacio tridimensional.
- Determinan la ecuación vectorial de la recta en el plano, la relacionan con la ecuación cartesiana de la misma y extienden a la ecuación vectorial de una recta en el espacio.
- Conocen la ecuación vectorial y analítica de un plano en el espacio y consideran las condiciones de paralelismo entre planos.
- Visualizan el cuerpo que se genera por traslaciones o rotaciones sucesivas de una figura geométrica, lo caracterizan y calculan sus volúmenes y áreas.

Comentario

En esta unidad se pretende situar al alumno en la geometría tridimensional, para ello interesa que los estudiantes desarrollen capacidades de representación de vectores tanto en el plano como en el espacio y que puedan manejar con soltura la operatoria básica que se presenta.

La relación que tiene esta unidad con el tema tratado se basa principalmente en el estudio de los cuerpos geométricos generados por rotaciones sucesivas o traslaciones sucesivas, en donde para resolver ciertos problemas de área y volumen de éstos, se requiere la utilización del teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos que se forman en ellos.

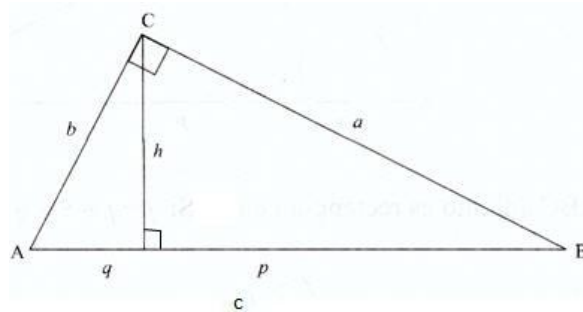
Es necesario mencionar que en una gran mayoría de los establecimientos educacionales chilenos, se estudia solamente los contenidos correspondientes a área y volumen de cuerpos geométricos por sobre el estudio de los vectores.

ANEXOS

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE EUCLIDES REFERENTE A LOS CATETOS

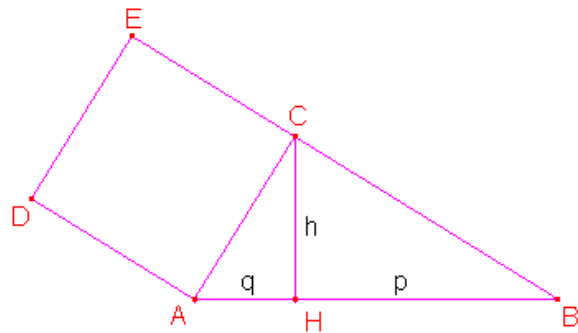
Hipótesis: $\triangle ABC$
 $\angle ACB = 90^\circ$

Tesis: $b^2 = c \cdot q$

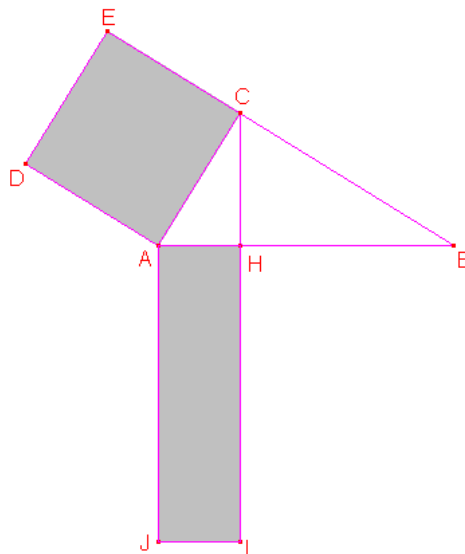


Demostración:

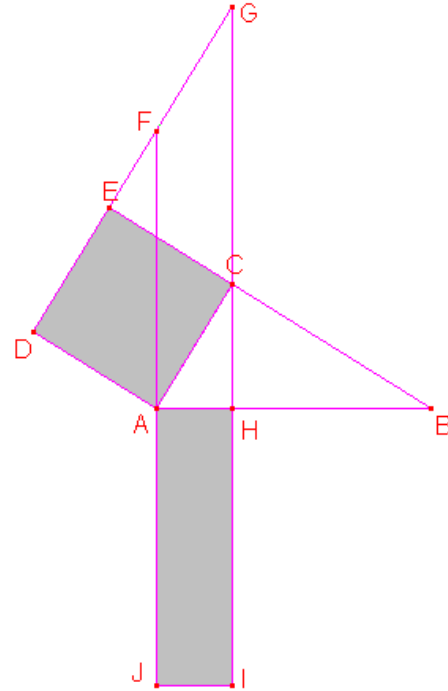
1. Se Dibuja el cuadrado ADEC y la altura correspondiente a C, siendo su pie el punto H como se ve en la figura.



2. Se construye el rectángulo AJIH, con $AJ = AB$



3. Prolongar los lados DE, AJ y HI como indica la figura y obtenemos el paralelogramo AFGC.



4. $\triangle ABC \cong \triangle AFD$ (por ALA)

$$\angle FDA \cong \angle BCA \text{ (recto)}$$

$$AD \cong AC \text{ por construcción (punto 2)}$$

$$\angle DAF \cong \angle CAB \text{ ya que}$$

$$\angle DAC = \angle FAB = 90^\circ$$

$$\angle DAF + \angle FAC = \angle FAC + \angle CAB$$

$$\angle DAF = \angle CAB$$

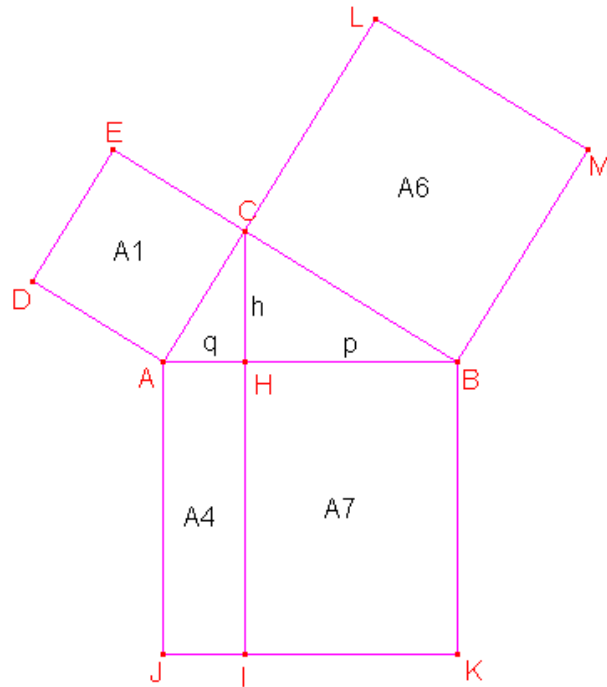
5. El área del cuadrado ADEC es igual al área del paralelogramo AFGC por estar entre paralelas y tener la misma base.
6. Además el área del paralelogramo AFGC es igual al área del rectángulo AHIJ.
7. Por el punto 5 y 6 tenemos que el área del cuadrado ADEC es igual al área del rectángulo AHIJ, es decir

$$b^2 = c \cdot q$$

SEGUNDA PARTE

Hipótesis: $\triangle ABC$
 $\angle ACB = 90^\circ$

Tesis: $a^2 = c \cdot p$



Sea $A1$ el área del cuadrado ADEC

$A4$ el área del rectángulo AHIJ

$A6$ el área del cuadrado CLMB

$A7$ el área del rectángulo HBKI

$$A8 = A4 + A7$$

Por teorema de Pitágoras $A8 = A1 + A6$, pero $A8 = A4 + A7$

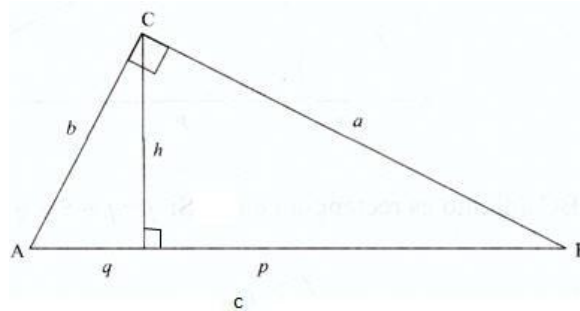
Luego $A4 + A7 = A1 + A6$ y ya se demostró que $A4 = A1$

Así $A7 = A6$

Es decir: $a^2 = c \cdot p$

TEOREMA DE EUCLIDES REFERENTE A LA ALTURA

Hipótesis: $\triangle ABC$
 $\angle ACB = 90^\circ$

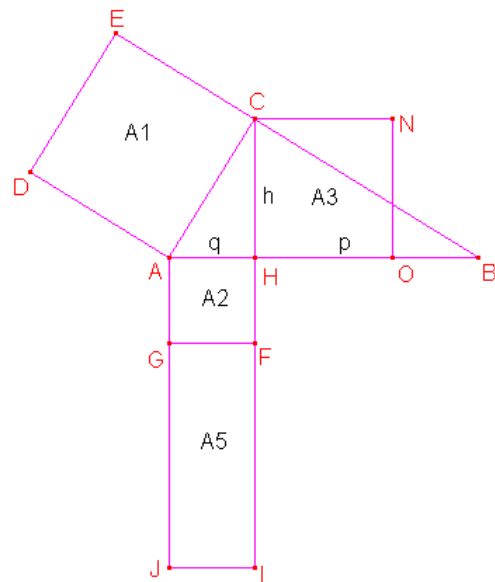


Tesis: $h^2 = p \cdot q$

Demostración:

1. En el $\triangle ABC$ se dibuja el cuadrado ADEC y la altura h correspondiente a C, siendo su pie el punto H.
2. Construir el rectángulo AHIJ de modo que AJ=AB. Y el cuadrado HCNO de lado CH = h

3. AHFG cuadrado de lado AH=q
4. Sea A1 el área del cuadrado ADEC
 A2 el área del cuadrado AHFG
 A3 el área del cuadrado HCNO
 A4 el área del rectángulo AHIJ
 A5 el área del rectángulo GFIJ

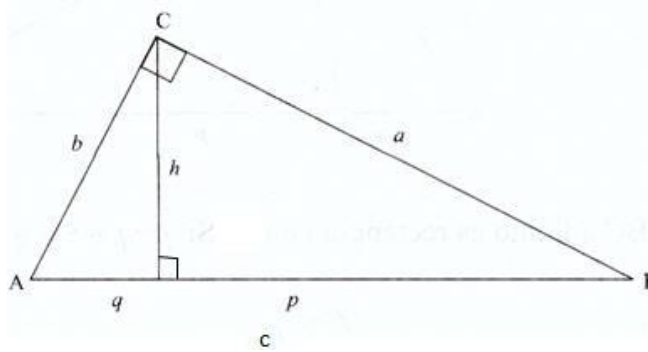


5. Aplicando el teorema de Pitágoras en $\triangle AHC$: $A1 = A2 + A3$
6. Anteriormente se demostró que $A1 = A4$ (Teorema del cateto).
7. Sea $A4 = A2 + A5$
8. $A1 = A2 + A3$ (por 5 y 7)
 $A1 = A4 - A5 + A3$. Entonces $A5 = A3$

Luego $h^2 = p \cdot q$

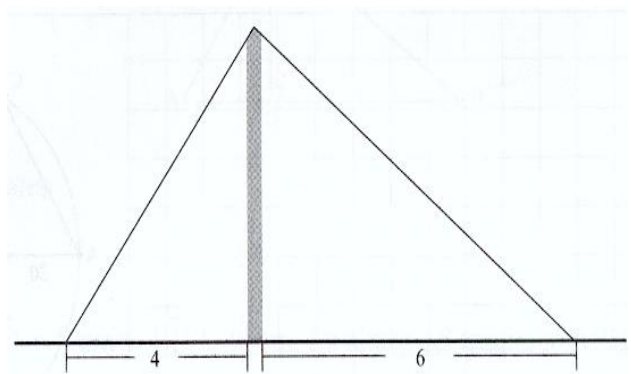
GUIA DE TRABAJO TEOREMA DE EUCLIDES

Para resolver los ejercicios 1, 2 y 3 considere la siguiente figura:

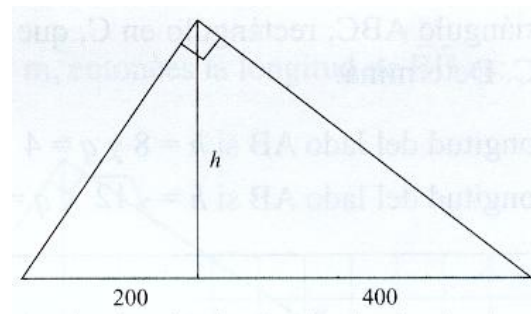


- 1) El $\triangle ABC$ adjunto es rectángulo en C. Si $p=8$ y $q=2$. Calcular el valor de h .
- 2) El $\triangle ABC$ adjunto es rectángulo en C. Si $q=5$ y $p=7$. Calcular el valor de h .
- 3) El $\triangle ABC$ adjunto es rectángulo en C. Si $p=\sqrt{128}$ y $q=\sqrt{2}$ Calcular h .

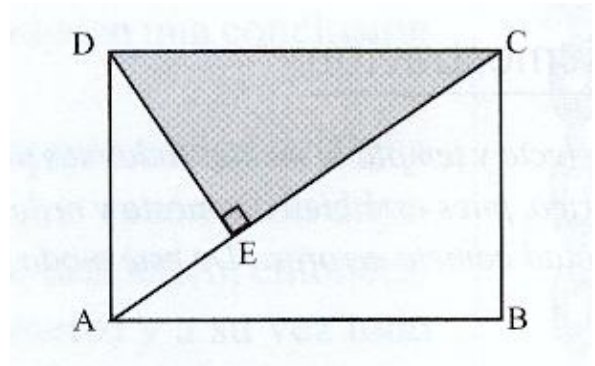
- 4) La base de un obelisco tiene 2 metros de ancho y dos fuentes luminosas, una por delante y otra por atrás y se ubican en el suelo a 4 y 6 metros de distancia de la base del obelisco, iluminando una estatua en la cúspide. Los rayos luminosos se interceptan formando un ángulo recto. Calcular la altura h del obelisco.



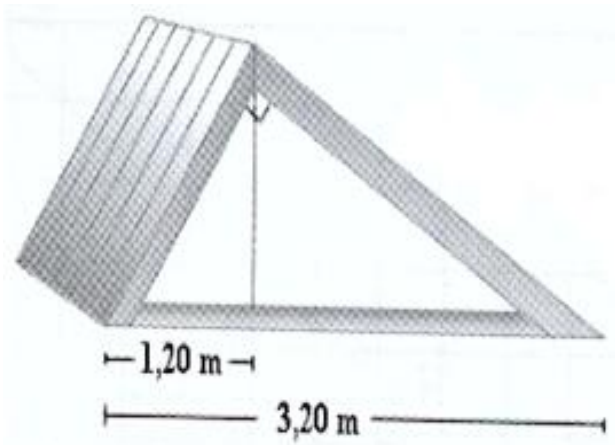
- 5) Las medidas en centímetros de un tobogán para niños, permiten establecer un triángulo rectángulo como se muestra en la figura. Si el ángulo que se forma entre la escalera de subida y la zona para deslizarse es recto, calcular la altura máxima del tobogán.



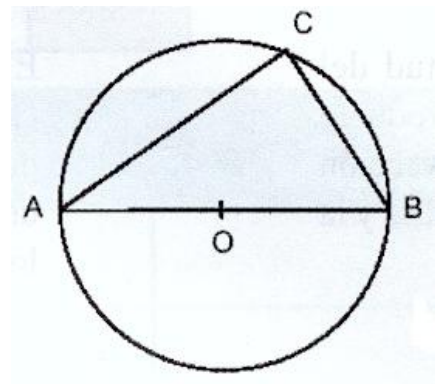
6) En el rectángulo ABCD adjunto, $AE=2,25$ y $ED=3$. Si DE es perpendicular con AC, calcular el perímetro del triángulo ECD.



7) Un albañil se encuentra diseñando el techo de una ampliación formada por una sucesión de vigas iguales, como se muestra en la figura. El ángulo que forma la unión de las vigas mide 90° . Si el albañil solo conoce la medida de la viga mayor que es de $3,20\text{m}$ y la distancia indicada en la figura sobre la viga mayor al bajar una perpendicular a ésta. ¿Qué longitud tendrá cada una de las vigas que van a sostener el techo?



8) El triángulo ABC de la figura está inscrito en la mitad de una circunferencia. Si la altura correspondiente al ángulo recto mide 4 cm y CB mide 5 cm entonces, calcular el radio de la circunferencia.



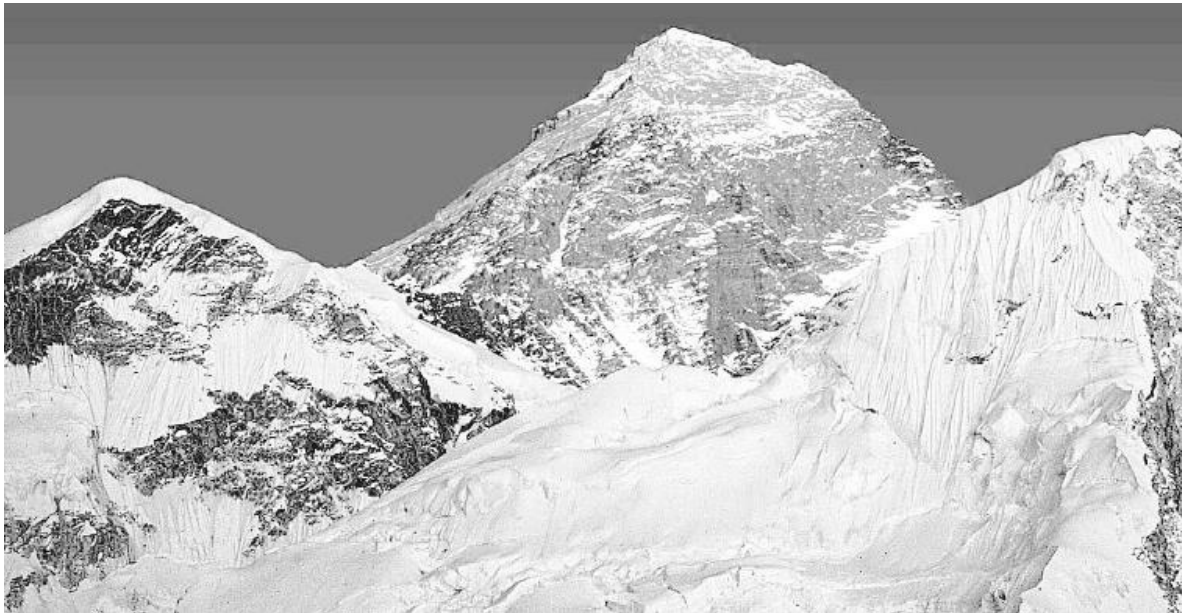
9) Dados dos segmentos que miden 2 cm y 1 cm , construir un segmento que mida $\sqrt{2}\text{ cm}$ y otro que mida $\sqrt{3}\text{ cm}$.

EXTRACTO Diario el mercurio, jueves 29 de mayo de 2003

Geodesia:

Cómo se midió el monte más alto del mundo

En tiempos sin GPS ni computadores las grandes alturas se medían con instrumentos y fórmulas.



ÚLTIMA MEDIDA.— En 1999 una expedición de la National Geographic dictaminó, ayudada con GPS, que el Everest mide 8.850 metros. Pero algunos críticos dicen que los GPS no son precisos y que presentan diferencias de hasta dos metros.

Había una vez una montaña muy alta pero que nadie había medido. No era fácil hacerlo. El país donde se encontraba estaba cerrado a los extranjeros y sólo podían ver la gran elevación a la distancia. El misterio habría quedado sin resolver si no fuera por la trigonometría y un instrumento de precisión llamado teodolito, parecido a un telescopio, con el cual se pueden medir ángulos.

La historia transcurre durante el siglo XIX, el territorio vedado se llamaba Nepal y el teodolito era el instrumento clave de la misión británica que cartografiaba India.

Tras el premio final

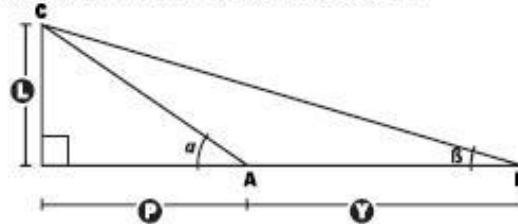
El encargado de la iniciativa era el geólogo e investigador George Everest, quien distribuyó una red de teodolitos en las inmediaciones de la frontera con Nepal. El resultado fue una red de triángulos imaginarios. A partir de ellos, Everest apuntó sus teodolitos a las más altas cumbres observables, construyendo más triángulos virtuales. Apoyado en el principio de que conociendo dos de los lados de un triángulo, el tercero se resolvía por ecuaciones, fue pacientemente determinando junto con su equipo la cartografía de la región. Difícil tarea porque por lo general las nubes cubrían la cadena montañosa y también la refracción solar distorsionaba los registros.

Sus computadores eran un ejército de calculistas que con nada más que lápiz y papel se dieron a la tarea de llevar la cuantiosa estadística recopilada a resultados.

Everest dejó India en 1843 pero el proyecto continuó. Fue justamente su sucesor Andrew Waugh quien señaló en una carta que los más altos picos del Himalaya estaban en alguna parte de la región norteña de Nepal y emprendió el reto de medirlos desde la distancia. En 1850 el Nandadevi fue declarado el pico más alto del mundo, pero al poco tiempo fue destronado por el Dhaulagiri. Pocos años después el honor que se creía definitivo lo obtuvo el Kanchun Junga, que hoy sabemos es sólo el tercero más alto.

LA INCÓGNITA: LA ALTURA

Sinkhdar tuvo que medir el Everest desde la India. Lo logró conociendo las tangentes. Éstas representan la pendiente de una recta. Se calcula como el cociente entre cuánto se asciende y cuánto se avanza. Sinkhdar, con un teodolito, hizo dos mediciones de ángulos: en el punto A y en el punto B. De allí obtuvo las tangentes de las rectas AC y BC.



Datos conocidos

- α ángulo
- β ángulo
- Y distancia

Así pudo generar dos ecuaciones:

i $\text{tangente } (\alpha) = \frac{L}{P}$

Las incógnitas son L y P. Como tenemos dos incógnitas y dos ecuaciones, tenemos la solución.

ii $\text{tangente } (\beta) = \frac{L}{(P+Y)}$

Así...

(i) - (ii) = $\tan (\alpha) - \tan (\beta) = \frac{L}{P} - \frac{L}{(P+Y)}$

$\tan (\alpha) - \tan (\beta) = \frac{L \times (P+Y) - L \times P}{P \times (P+Y)}$

$\tan (\alpha) - \tan (\beta) = \frac{L \times (P+Y-P)}{P \times (P+Y)}$

$\tan (\alpha) - \tan (\beta) = \frac{L \times Y}{P \times (P+Y)}$

$\tan (\alpha) - \tan (\beta) = \frac{L}{(P+Y)} \times \frac{Y}{P}$

$\tan (\alpha) - \tan (\beta) = \tan (\beta) \times \frac{Y}{P}$

Ahora podemos despejar la incógnita P.

iii $P = \frac{\tan (\beta) \times Y}{\tan (\alpha) - \tan (\beta)}$

Sustituimos iii en i

$\tan (\alpha) = \frac{L}{\frac{\tan (\beta) \times Y}{\tan (\alpha) - \tan (\beta)}}$

$L = \frac{\tan (\alpha) \times (\tan (\beta) \times Y)}{\tan (\alpha) - \tan (\beta)}$

iv $L = \frac{Y \times \tan (\alpha) \times \tan (\beta)}{\tan (\alpha) - \tan (\beta)}$

Ahora conocemos L, la altura de la montaña lejana.

EL MERCURIO

El premio final se lo llevaría otra lejana montaña que había sido observada en 1847 por J. W. Armstrong, pero éste no completó la evaluación y simplemente lo bautizó como “V”. J. O. Nicholson sí se dio el trabajo hacia 1850, nombrándolo “pico XV”. Sus medidas apuntaban a que era el más alto, pero fue la evaluación del indio Radhanath Sinkhdar en 1852 la definitiva, otorgándole 8.840,07 metros.

La leyenda cuenta que Sinkhdar arribó muy excitado a la oficina de Waugh con las palabras “¡Señor, me parece que he descubierto la montaña más alta del mundo!”. Descubierta para occidente, porque tanto los nativos nepaleses como tibetanos (cuya frontera la montaña comparte) la conocían hace tiempo. Los primeros la llaman “Sagarmatha” (la ceja sobre el océano) y los tibetanos, “Quomolangma” o “Chomolungma” (Diosa Madre de la Tierra).

Pero tras años de discusiones primó la visión imperial. La Royal Geographic Society, por sugerencia de Waugh, optó por nombrarla “Everest”, en homenaje al antiguo topógrafo jefe de la misión. Y eso que el mismo Everest prefería los nombres nativos.

En adelante, conquistar la cumbre del Everest se transformó en un desafío que sólo se vio coronado hace apenas 50 años, un día como hoy.

Chilenos cuesta arriba

El primer chileno que participó en una expedición al Everest por allá por los años 20 se llamaba Jimmy Gabin y era de Antofagasta. Ningún compatriota se remontaría por esas alturas hasta que el mayor de Ejército Arturo Aranda y el sargento Baltazar Catalán integraron una expedición italiana que hizo cumbre en mayo de 1973. Erróneamente se dijo que ellos también habían estado arriba pero sólo llegaron a los 7 mil metros.

La tercera expedición, esta vez completamente chilena, tiene lugar en 1983 con Gastón Oyarzún y Claudio Lucero. Pasan los 8 mil metros.

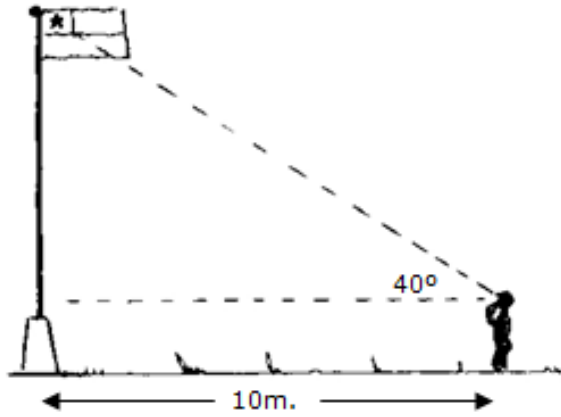
En 1986 la cuarta expedición, encabezada por Rodrigo Jordán, cobra una víctima fatal, Víctor Hugo Trujillo. Jordán insiste en 1989 y finalmente su expedición logra cumbre en 1992 al mismo tiempo que la de Mauricio Purto. Fue un doble ascenso único en el mundo. “Ningún país había puesto dos expediciones el mismo día a la misma hora y por rutas distintas”, recuerda Purto.

En 2001 le tocaría a las mujeres, Patricia Soto, Vivianne Cuq y Cristina Prieto. Ahora Purto podría volver. “Mi hijo Luciano quiere que lo suba con él. ¿Y por qué no? estoy joven de cuerpo todavía”.

GUIA DE TRABAJO

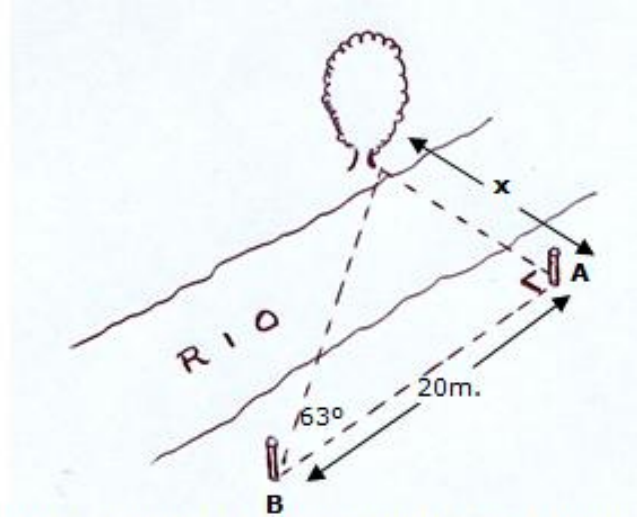
RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1)



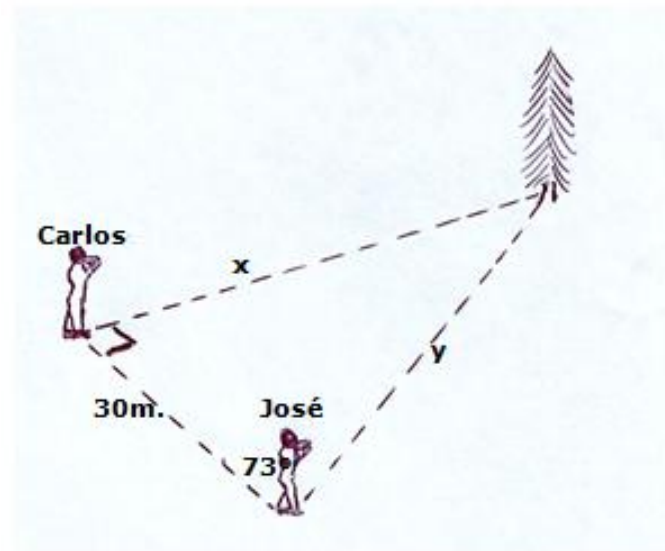
Estatura del observador: 1,70m.
Calcular la altura del mástil de la bandera

2)



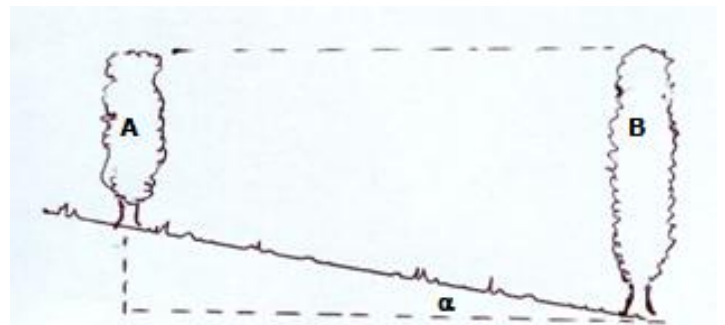
Calcular la distancia entre la estaca A y el árbol del otro lado del río.

3)



Calcular las distancias desde Carlos y José al árbol

4)



La distancia horizontal entre los árboles A y B es de 80m., la longitud del árbol A es de 10,5m., y la del árbol B, es de 14,5m.; encuentre el ángulo de inclinación del terreno con respecto a la horizontal.

- 5) La sombra de una casa mide 12 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 25° con la horizontal. Encuentra la altura de la casa.
- 6) Un avión despegando formando un ángulo de 30° con el piso. ¿Cuál es la distancia, sobre la pista, cuando el avión haya recorrido 900 metros de vuelo desde el punto de elevación?
- 7) El ángulo de elevación de la parte superior de un edificio mide 50° . Calcula la altura del edificio si el punto de observación está a 40 metros de él.
- 8) Desde un faro que tiene 48 m de altura, se observa un bote con un ángulo de depresión de 30° , encuentre la distancia a que el observador está del bote.
- 9) Encuentre el ángulo de elevación del sol cuando la sombra de un poste de 6 metros de altura es de 3,5 metros.
- 10) Encuentre la distancia a que está un observador de la cima de un risco que tiene 132 m de altura, sabiendo que el ángulo de elevación es de 41° .
- 11) El ángulo de elevación de la parte superior de una torre es de 30° ; acercándose 100 m se encuentra que el ángulo de elevación es de 60° . Encuentre la altura de la torre.
- 12) El ángulo de elevación desde los pies de un observador que mira hacia la punta de una torre es de 40° . Cuando se acerca 35 m a la torre, el ángulo de elevación es de 60° . Determina la altura de la torre.
- 13) Desde la cúspide de un monumento de 40 m de altura, los ángulos de depresión de dos niños situados en la dirección norte son de 60° y 30° respectivamente. Encuentra la distancia a que se encuentran los niños.
- 14) Un hombre cuyos ojos están a 1,7 metros del suelo ve la parte de un obelisco formando un ángulo de elevación de 45° con la horizontal. Acercándose 30 m, el ángulo de elevación es de 60° . ¿Cuánto mide el obelisco?